Exercice 2. Soit Ω un ensemble fini ou dénombrable et soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité quelconque sur Ω. On fixe deux événements A et B.

1. Supposons que $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$, montrer que $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Exhiber des exemples qui montrent que les deux bornes peuvent être atteintes.
2. Montrer que si $A \cup B = \Omega$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c).$$

Exercice 3 (Conditionnement)**.** L'exercice suivant est très classique et a de nombreuses variantes. Il illustre l'utilité d'une formulation mathématique rigoureuse pour éviter des pièges et des paradoxes dus à des raisonnements spécieux.
Une famille a deux enfants. On suppose les 4 configurations (ω_1, ω_2) avec ω_i le sexe du *i*ème enfant équiprobables.

1. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que le plus jeune enfant est une fille vaut $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'enfant plus âgé est une fille vaut $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des enfants est une fille vaut $\frac{1}{3}$.

---

2 Borel-Cantelli

Exercice 4 (Limite supérieure d'ensembles)**.** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. Que représentent les événements

$$\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{k\geq 1}\bigcap_{n\geq k} A_n$$

respectivement ? Le premier est noté $\boldsymbol{\limsup_{n\to\infty} A_n}$.

2. Si l'espace Ω est $\mathbb{R}$, donner $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les trois cas suivants :
   (a) $A_n = [-1/n, 3 + 1/n]$,
   (b) $A_n = [-2 - (-1)^n, 2 + (-1)^n[$,
   (c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite ordonnée des nombres premiers et $p_n\mathbb{N} = \{0, p_n, 2p_n, \ldots\}$ est l'ensemble des multiples de p_n.
3. Comparer les événements $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n)$ et $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n)$ respectivement avec $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} B_n$.

Ex 4 . 1) $\omega \in \overbrace{\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} A_n}^{\overline{\lim}(A_n)} \iff \forall k\geq 1, \exists n\geq k, \omega \in A_n$

$\iff \exists (n_k)_{k\geq 1}, \omega \in A_{n_k}, n_k \geq k$

$\iff \exists (n_k)_{k\geq 1}, n_{k+1} > n_k, \omega \in A_{n_k}$.

$\iff \omega$ appartient à une $\infty^{\text{té}}$ de (A_n)

$\omega \in \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} A_n \iff \exists k\geq 1, \forall n\geq k, \omega \in A_n \iff$ APCR (A partir d'un certain rang). $\omega \in$ à ts les (A_n).

on peut mq. $\mathbb{1}_{\overline{\lim} A_n} = \overline{\lim}_n \mathbb{1}_{A_n}$ et $\underline{\lim}\, \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_{\underline{\lim} A_n}$.

où $\left| \begin{array}{l} \overline{\lim}_n u_n := \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} u_k\right) \\ \underline{\lim}\, u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} u_k\right). \end{array}\right.$

2) (a) $A_n = [-1/n, 3+1/n]$. $\omega \in \overline{\lim} A_n \iff \exists (n_k)$ suite $\uparrow^\infty$ tq : $\omega \in A_{n_k}$

$\iff \exists n_k \uparrow^\infty \omega \in [-1/n_k, 3+1/n_k]$.

$\iff \omega \in [0,3]$.

(b) $A_n = [-2-(-1)^n, 2+(-1)^n[$ ie: $A_{2k} = [-3,3[$, $A_{2k+1} = [-1,1[$

$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{k\geq 1} \underbrace{\bigcup_{n\geq k} A_n}_{[-3,3[} = [-3,3[$.

(c) $A_n = p_n \mathbb{N}$. $\omega \in \overline{\lim} A_n \iff \exists \left(\begin{array}{l} n_k \uparrow \infty \\ n_k \text{ premier} \end{array}\right.$ tq: $\omega \in A_{n_k} = n_k \mathbb{N}$

$\iff \omega = 0$ (car pour k assez grand, $\omega < n_k$ et $\omega \in n_k\mathbb{N}$ $\Rightarrow \omega = 0$)

3) $\omega \in \left(\underbrace{\overline{\lim}_{n\to+\infty} (A_n \cup B_n)}_{\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k}(A_n\cup B_n)}\right) \iff \exists n_k \uparrow^\infty \omega \in A_{n_k} \cup B_{n_k}$.

$\iff \left(\exists n_k \uparrow^\infty \omega \in A_{n_k}\right)$ ou $\left(\exists n_k \uparrow^\infty \omega \in B_{n_k}\right)$.

$\iff (\omega \in \overline{\lim} A_n)$ ou $(\omega \in \overline{\lim} B_n)$.

$\iff \omega \in \overline{\lim} A_n \cup \overline{\lim} B_n$.

$\omega \in \overline{\lim}_n (A_n \cap B_n) \iff \exists n_k \uparrow \infty, \omega \in A_{n_k} \cap B_{n_k}$.

$\Rightarrow \left(\exists n_k \uparrow \infty, \omega \in A_{n_k}\right)$ et $\left(\exists n_k \uparrow \infty, \omega \in B_{n_k}\right)$.

$\Rightarrow \omega \in \overline{\lim}(A_n)$ et $(\omega \in \overline{\lim} B_n)$.

$\Rightarrow \omega \in \overline{\lim}(A_n) \cap \overline{\lim} B_n$.

$$\begin{cases} A_{2\ell} = B_{2\ell+1} = \{0\}. \\ A_{2\ell+1} = B_{2\ell} = \{1\} \end{cases}$$

$\overline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, B_n = \{0,1\}.$

$\forall n,\ A_n \cap B_n = \emptyset \qquad \overline{\lim\limits_{n}}\, (A_n \cap B_n) = \emptyset.$

mais :

$(\overline{\lim}\, A_n) \cap (\overline{\lim}\, B_n) = \{0,1\}.$

Exercice 5 (Retours en zéro d'une marche aléatoire). Soit $p \in]0,1[$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1-p.$$

On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors avec probabilité 1 la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne prend la valeur 0 qu'un nombre fini de fois. Peut-on conclure aussi facilement lorsque $p = \frac{1}{2}$?
On pourra faire appel à la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$ lorsque $n \to \infty$.

Ex 5. (X_n) v.a indép., $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1-p$. $\quad X_i = 2U_i - 1$, $U_i \sim Be(p)$.

. Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Si $p \neq 1/2$, posons : $A_n = \{S_{2n} = 0\}$.

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n} (2U_i - 1) = 0\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\cancel{2}\left(\sum_{i=1}^{2n} U_i\right) = \cancel{2}n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n} U_i = n\right) = \underbrace{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}_{\binom{2n}{n}} p^n (1-p)^{2n-n}.$$

$$= \frac{(2n)!}{(n!)^2} (p(1-p))^n \underset{+\infty}{\approx} \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}\,(2n/e)^{2n}}{2\pi n\,(n/e)^{2n}} (p(1-p))^n$$

$$\underset{+\infty}{\approx} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big[\underbrace{4p(1-p)}_{<1}\Big]^n. \qquad 2p(1-p) < 1.$$

(car $p \neq 1/2$).

Donc : $\underbrace{\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)}$ $< \infty$.

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_n}] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n}\Big] < \infty$$

Donc : avec proba 1, $\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} < \infty$.

ie : $\mathbb{P}(\underbrace{\omega \in \text{à un nb fini de } A_n}_{S_n = 0 \text{ un nb fini de fois}}) = 1 = \mathbb{P}((\overline{\lim} A_n)^c)$

ie : $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$.

$\underline{p = 1/2}$

- $\mathbb{P}(A_n) \approx \frac{c}{\sqrt{n}}$; $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty$.

  - mais ici on peut pas appliquer Borel-Cantelli car (A_n) pas <u>indép</u>.

Exercice 7 (Loi géométrique)**.** On modélise le jeu de pile ou face par une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, en codant 1 pour succès (pile) et 0 pour échec (face) : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p$.

1. On pose $T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$. Que représente la variable aléatoire T_1, qu'elle est sa loi, sa moyenne, sa variance ?
2. Soit $k \geq 2$; on s'intéresse à la variable T_k définie par $T_k = \inf\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^n X_i = k\}$ représentant l'instant où le joueur réalise son $k$ème succès. Déterminer la loi de T_k.
3. Posons $T_0 = 0$ et $\Delta_k = T_k - T_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Montrer que les variables aléatoires Δ_k sont indépendantes et de même loi.

Ex 7 : (X_i) iid. $X_1 \sim Be(p)$.

$T_1 = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$.

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) \overset{(X_i)\text{ indep.}}{=} \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{k-1} = 0) \times \mathbb{P}(X_k = 1)$$
$$= (1-p)^{k-1} p.$$

$T_1 \sim geom(p)$.

$$\mathbb{E}(T_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, \mathbb{P}(T_1 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} p = -p \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} -n(1-p)^{n-1}}_{f'(p)} \quad \left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-x)^n = \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0,1[\right.$$
$$= -p\, f'(p)$$
$$= -p \times \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}.$$

$$\mathbb{E}(T_1(T_1 - 1)) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-1} p$$
$$= (1-p)p \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2}}_{f''(p)} = (1-p)p \times \left(\frac{2}{p^3}\right) = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

$$Var(T_1) = \mathbb{E}(T_1^2) - \mathbb{E}(T_1)^2 = \mathbb{E}(T_1(T_1 - 1)) + \mathbb{E}(T_1) - \mathbb{E}(T_1)^2$$
$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2(1-p) + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

2) $\forall n \geq k$ $\boxed{n \geq k}$
$$\mathbb{P}(T_k = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k-1,\ X_n = 1\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k-1\right) \mathbb{P}(X_n = 1) \quad \text{car } (X_1, \dots, X_{n-1}) \underset{\text{indép.}}{\perp\!\!\!\perp} X_n.$$
$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}\, p.$$

3)
$$\mathbb{P}(\Delta_1 = \ell_1, \dots, \Delta_n = \ell_n) = \mathbb{P}(T_1 = \ell_1, T_2 = \ell_1 + \ell_2, \dots, T_n = \ell_1 + \dots + \ell_n)$$
$$= \mathbb{P}(\forall i \in \{\ell_1, \ell_1 + \ell_2, \dots, \ell_1 + \dots + \ell_n\}, X_i = 1,\ \forall j \notin \{\ell_1, \dots, \ell_1 + \dots + \ell_n\}, X_j = 0).$$

$j \in [1 : \ell_1+\dots+\ell_n] \setminus \{\ell_1, \ldots, \ell_1+\dots+\ell_n\}$

$$= p^n \quad (1-p)^{\ell_1+\dots+\ell_n - n}.$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \Big[\underbrace{(1-p)^{\ell_i - 1} \, p} \Big]. \quad = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\Delta_i = \ell_i).$$

$$\mathbb{P}(\Delta_i = \ell_i) = \sum_{\substack{\ell_k = 1 \\ k \neq i}}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\Delta_1 = \ell_1, \ldots, \Delta_n = \ell_n)}_{\left[(1-p)^{\ell_i-1} p\right]\left(\prod_{k \neq i} (1-p)^{\ell_k - 1} p\right)} = (1-p)^{\ell_i - 1} p$$

$(\Delta_i)_{1 \le i \le n}$ sont indép et de loi Geom(p).