EXAMEN DE CHAÎNES DE MARKOV

Randal Douc et Eric Moulines

Exercise 1

We first recall some usual notation, already used in the course.

Let $(\mathsf{X}, \mathscr{X})$ be a measurable space. For a given Markov kernel P on $\mathsf{X} \times \mathscr{X}$, we denote by $\mathbb{P}_\xi$, the probability measure induced on $(\mathsf{X}^{\mathbb{N}}, \mathscr{X}^{\otimes \mathbb{N}})$ by the Markov kernel P and initial distribution $\xi \in \mathbb{M}_1(\mathscr{X})$. The associated expectation operator is noted $\mathbb{E}_\xi$.

For a given measurable space $(\mathsf{G}, \mathscr{G})$, $\mathsf{F}_+(\mathsf{G})$ denotes the set of measurable functions taking values in $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Let $\mathsf{C} \in \mathscr{X}$ and let $\mathscr{C}$ be the σ-field $\mathscr{C} = \{\mathsf{A} \cap \mathsf{C} : \mathsf{A} \in \mathscr{X}\}$. Define by π_{C} the restriction of π on C, that is: $\pi_{\mathsf{C}}(\mathsf{A}) = \frac{\pi(\mathsf{A} \cap \mathsf{C})}{\pi(\mathsf{C})}$ for all $\mathsf{A} \in \mathscr{X}$. Recall that the first hitting time of the set C is defined by

$$\sigma_{\mathsf{C}} = \inf\{k \geq 1 : X_k \in \mathsf{C}\}$$

with the convention that $\sigma_{\mathsf{C}} = \infty$ if $\{k \geq 1 : X_k \in \mathsf{C}\} = \emptyset$.

In what follows, we say that $\mathsf{C} \in \mathscr{X}$ is π-accessible if $\mathbb{P}_x(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) > 0$ for π-almost all $x \in \mathsf{X}$. In this exercise, we assume that

(i) P is a Markov kernel on $\mathsf{X} \times \mathscr{X}$ with an invariant probability measure π such that C is π-accessible.

We recall that under (i), the Kac formula holds true: for all $h \in \mathsf{F}_+(\mathsf{X})$,

$$\pi(h) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} h(X_k) \right] = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathsf{C}}} h(X_k) \right] \tag{1.1}$$

1. Using the Kac formula (1.1) with a convenient choice of h, show that $\mathbb{P}_\pi(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = 1$.
   Solution.

Using Kac's formula with $h(x) = \mathbb{P}_x(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\pi(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = \pi(h) &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} \mathbb{P}_{X_k}(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) \right] \\ &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k < \sigma_{\mathsf{C}}\}} \mathbb{P}_{X_k}(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) \right]\end{aligned}$$

Therefore by Markov's property,

$$\mathbb{P}_\pi(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\underbrace{\mathbb{1}_{\{k < \sigma_{\mathsf{C}}\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{\mathsf{C}} \circ \theta^k < \infty\}}}_{\mathbb{1}_{\{k < \sigma_{\mathsf{C}}\}} \mathbb{1}_{\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}}} \right] = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x[\sigma_{\mathsf{C}} \mathbb{1}\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}] \tag{1.2}$$

But using again Kac's formula with $h = \mathbb{1}_{\mathsf{X}}$,

$$1 = \pi(\mathsf{X}) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x[\sigma_{\mathsf{C}}]$$

Therefore for π-almost all $x \in \mathsf{C}$, $\mathbb{E}_x[\sigma_{\mathsf{C}}] < \infty$ and thus, $\mathbb{E}_x[\sigma_{\mathsf{C}}] = \mathbb{E}_x[\sigma_{\mathsf{C}} \mathbb{1}\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}]$. Plugging it into (1.2) yields

$$\mathbb{P}_\pi(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = \pi(\mathsf{X}) = 1$$

$\square$

2. Deduce that $\mathbb{P}_x(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = 1$ for π-almost all $x \in \mathsf{X}$
Solution.

By the previous question

$$0 = 1 - 1 = \int_{\mathsf{X}} \pi(\mathrm{d}x) \left[\underbrace{1 - \mathbb{P}_x(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty)}_{\geq 0} \right]$$

the result follows. $\square$

We assume in addition that

(ii) Q is a Markov kernel on $\mathsf{C} \times \mathscr{C}$ with an invariant probability measure π_{C}.

For any probability measure μ on $(\mathsf{X} \times \mathsf{C}, \mathscr{X} \otimes \mathscr{C})$, consider a family of random elements $\{(Y_k, Z_k), k \in \mathbb{N}\}$ on the same probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ where Y_k takes values on X and Z_k on C, obtained from Algorithm 1, where we have defined $\mathscr{F}_k = \sigma(Y_0, \ldots, Y_k, Z_0, \ldots, Z_k)$.

Algorithm 1 The teleportation process

Initialization: sample $(Y_0, Z_0) \sim \mu$, that is $\mathbb{P}((Y_0, Z_0) \in \mathsf{A}) = \mu(\mathsf{A})$ for $\mathsf{A} \in \mathscr{X} \otimes \mathscr{C}$.
for $k = 1$ to n **do**
    sample $Y_k^\star \sim P(Y_{k-1}, \cdot)$ that is $\mathbb{P}(Y_k^\star \in \mathsf{A} | \mathscr{F}_{k-1}) = P(Y_{k-1}, A)$ for $\mathsf{A} \in \mathscr{X}$.
    if $Y_k^\star \notin \mathsf{C}$ **then**
        set $(Y_k, Z_k) = (Y_k^\star, Z_{k-1})$.
    else
        sample $Z_k \sim Q(Z_{k-1}, \cdot)$, that is $\mathbb{P}(Z_k \in \mathsf{B} | \mathscr{F}_{k-1} \cap \sigma(Y_k^\star)) = Q(Z_{k-1}, \mathsf{B})$ for all $\mathsf{B} \in \mathscr{C}$ on the event $\{Y_k^\star \notin \mathsf{C}\}$. And set $Y_k = Z_k$.
    end if
end for

3. Show that $\{(Y_k, Z_k), k \in \mathbb{N}\}$ is a Markov chain. Denoting by R the associated Markov kernel on $(\mathsf{X} \times \mathsf{C}) \times (\mathscr{X} \otimes \mathscr{C})$, write the expression of $Rh(y,z)$ for any $(y,z) \in \mathsf{X} \times \mathsf{C}$ and $h \in \mathsf{F}_+(\mathsf{X} \times \mathsf{C})$.
Solution.

For any $(y,z) \in \mathsf{X} \times \mathsf{C}$ and $h \in \mathsf{F}_+(\mathsf{X} \times \mathsf{C})$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[h(Y_k, Z_k) | \mathscr{F}_{k-1}\right] &= \mathbb{E}\left[h(Y_k^\star, Z_{k-1}) \mathbb{1}_{\{Y_k^\star \in \mathsf{C}\}} + h(Z_k, Z_k) \mathbb{1}_{\{Y_k^\star \notin \mathsf{C}\}} | \mathscr{F}_{k-1}\right] \\
&= \int_{\mathsf{C}^c} P(Y_{k-1}, \mathrm{d}y_k^\star) h(y_k^\star, Z_{k-1}) + P(Y_{k-1}, \mathsf{C}) \int_{\mathsf{C}} Q(Z_{k-1}, \mathrm{d}z_k) h(z_k, z_k)
\end{aligned}$$

Since the rhs only depends on (Y_{k-1}, Z_{k-1}), the sequence $\{(Y_k, Z_k), k \in \mathbb{N}\}$ is a Markov chain and the associated Markov kernel R is given by

$$Rh(y,z) = \int_{\mathsf{C}^c} P(y, \mathrm{d}y') h(y', z) + P(y, \mathsf{C}) \int_{\mathsf{C}} Q(z, \mathrm{d}z') h(z', z'), \tag{1.3}$$

for any $(y,z) \in \mathsf{X} \times \mathsf{C}$ and $h \in \mathsf{F}_+(\mathsf{X} \times \mathsf{C})$. $\square$

Define the measure $\bar{\pi}$ on $(\mathsf{X} \times \mathsf{C}, \mathscr{X} \otimes \mathscr{C})$ by: for all $h \in \mathsf{F}_+(\mathsf{X} \times \mathsf{C})$,

$$\bar{\pi}(h) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} h(X_k, x) \right], \tag{1.4}$$

where $\mathbb{E}_\xi$ is the expectation associated to the probability measure $\mathbb{P}_\xi$ induced on $(\mathsf{X}^{\mathbb{N}}, \mathscr{X}^{\otimes \mathbb{N}})$ by the Markov kernel P and initial distribution $\xi \in \mathbb{M}_1(\mathscr{X})$, and we set by convention $\mathbb{E}_x = \mathbb{E}_{\delta_x}$ to alleviate notation.

4. Express the first and second marginal distributions of $\bar{\pi}$.
Solution.

Write for any $(\mathsf{A}, \mathsf{B}) \in \mathscr{X} \times \mathscr{C}$

$$\bar{\pi}(\mathsf{A} \times \mathsf{C}) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x)\, \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} \mathbb{1}_A(X_k) \right] \stackrel{(1)}{=} \pi(A)$$
$$\bar{\pi}(\mathsf{X} \times \mathsf{B}) = \int_{\mathsf{C} \cap B} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x [\sigma_{\mathsf{C}}]$$

where the first equality $\stackrel{(1)}{=}$ comes from the Kac formula. □

5. Show that $\bar{\pi}(Rh) = A + B$ where

$$A = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k \le \sigma_{\mathsf{C}}-1\}} \int_{\mathsf{C}^c} P(X_k, \mathrm{d}y') h(y', x) \right],$$
$$B = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k \le \sigma_{\mathsf{C}}-1\}} P(X_k, \mathsf{C}) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z').$$

Solution.

Write
$$\bar{\pi}(Rh) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} Rh(X_k, x) \right]$$
Replacing R by (1.3) yields $\bar{\pi}(Rh) = A + B$ where A and B are defined by

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} \int_{\mathsf{C}^c} P(X_k, \mathrm{d}y') h(y', x) \right] \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k \le \sigma_{\mathsf{C}}-1\}} \int_{\mathsf{C}^c} P(X_k, \mathrm{d}y') h(y', x) \right], \\ B &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} P(X_k, \mathsf{C}) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z') \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k \le \sigma_{\mathsf{C}}-1\}} P(X_k, \mathsf{C}) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z'), \end{aligned}$$

where $\stackrel{(1)}{=}$ and $\stackrel{(2)}{=}$ are obtained from the interchange between expectation and series of nonnegative terms. □

6. Show that $B = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}z') h(z', z')$.
Solution.

Using Markov's property and Tonelli's theorem,

$$
\begin{aligned}
B &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{\{k \le \sigma_{\mathsf{C}}-1\}} \mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_{k+1}) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z') \\
&= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} \mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_{k+1}) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z') \\
&= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathsf{C}}} \mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_k) \right] \int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z') \\
&\overset{(1)}{=} \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \left(\int_{\mathsf{C}} Q(x, \mathrm{d}z') h(z', z') \right) = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}z') h(z', z'),
\end{aligned}
$$

where $\overset{(1)}{=}$ follows from $\mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_k) = 0$ for $k \in [1 : (\sigma_{\mathsf{C}} - 1)]$ and $\mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_{\sigma_{\mathsf{C}}}) = 1$ on $\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}$ and the last equality follows from $\pi_{\mathsf{C}} Q = \pi_{\mathsf{C}}$. Note that we have used $\mathbb{P}_x(\sigma_{\mathsf{C}} < \infty) = 1$ for π-almost all $x \in \mathsf{X}$ (Question 2) to say that $\mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathsf{C}}} \mathbb{1}_{\mathsf{C}}(X_k) \right] = \mathbb{E}_x [\mathbb{1}\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}] = 1$ for π-almost all $x \in \mathsf{X}$. □

7. Deduce that $\bar{\pi}$ is an invariant probability measure for R.

Solution.

Markov's property and Tonelli's theorem yields

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} \mathbb{1}_{\mathsf{C}^c}(X_{k+1}) h(X_{k+1}, x) \right] \\
&= \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathsf{C}}} \mathbb{1}_{\mathsf{C}^c}(X_k) h(X_k, x) \right] = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=1}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} h(X_k, x) \right],
\end{aligned}
$$

where the last equality follows from $\mathbb{1}_{\mathsf{C}^c}(X_k) = 1$ for $k \in [1 : (\sigma_{\mathsf{C}} - 1)]$ and $\mathbb{1}_{\mathsf{C}^c}(X_{\sigma_{\mathsf{C}}}) = 0$ on $\{\sigma_{\mathsf{C}} < \infty\}$. Combining with the expression of B given by the previous question, we get:

$$
\bar{\pi}(Rh) = A + B = \int_{\mathsf{C}} \pi(\mathrm{d}x) \mathbb{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\sigma_{\mathsf{C}}-1} h(X_k, x) \right] = \bar{\pi}(h)
$$

□

Exercise 2

Nous considérons l'algorithme de Metropolis-Hastings sur $\mathsf{X} = \mathbb{R}^k$ muni de sa tribu Borélienne $\mathscr{X} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$. Nous notons h_π la densité cible, $q(x, \cdot)$ la densité de proposition (ces densités sont prises par rapport à la mesure de Lebesgue, notée Leb). On peut toujours choisir ces densités pour que $h_\pi(y) < \infty$ et $q(x, y) < \infty$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^k$. Pour $x \in \mathbb{R}^k$ et $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$, le noyau de transition est donné par

$$
P(x, A) = \int \alpha(x, y) q(x, y) \mathbb{1}_A(y) \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) + (1 - \bar{\alpha}(x) \delta_x(A)
$$

où nous avons posé

$$
\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 \wedge \frac{h_\pi(y) q(y, x)}{h_\pi(x) q(x, y)} & h_\pi(x) q(x, y) > 0 \\ 1 & h_\pi(x) q(x, y) = 0 \end{cases} \tag{1.5}
$$

et $\bar{\alpha}(x) = \int \alpha(x, y) q(x, y) \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y)$. Nous rappelons que $A \mapsto \pi(A) = \int_A h_\pi(y) \mathbb{1}_A(y) \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y)$ est une loi stationnaire pour P. Nous supposons que

$$
h_\pi(y) > 0 \Rightarrow (q(x, y) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k)
$$

1. Montrer que π est une mesure d'irréductibilité. Est elle maximale ?
Solution.

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ telle que $\pi(A) > 0$. Alors,

$$0 < \pi(A) = \int_A h_\pi(y)\text{Leb}(\text{d}y) = \int_B h_\pi(y)\text{Leb}(\text{d}y)$$

où $B = A \cap \{y \in \mathbb{R}^k : h_\pi(y) > 0\}$. Ce qui implique en particulier $\text{Leb}(B) > 0$. Maintenant, notons que par définition de B, pour tout $y \in B$, $h_\pi(y) > 0$ ce qui implique que $q(x,y) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$. Donc, vu la définition de α on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^k \times B$, $\alpha(x,y) > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, en combinant avec $\text{Leb}(B) > 0$,

$$\int_B \underbrace{\alpha(x,y)}_{>0}\underbrace{q(x,y)}_{>0}\text{Leb}(\text{d}y) > 0$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x,A) \geq \int_A \alpha(x,y)q(x,y)\text{Leb}(\text{d}y) \geq \int_B \alpha(x,y)q(x,y)\text{Leb}(\text{d}y) > 0$ et finalement, P est π-irreductible. Comme π est une probabilité invariante, le Théorème 9.2.15 montre que π est une mesure d'irreductibilité maximale. □

2. Le noyau P est il récurrent ?
Solution.

Le noyau P étant irréductible et admettant une probabilité invariante, il est récurrent (voir Theorem 10.1.6). □

Nous supposons maintenant et pour le reste de l'exercice que les fonctions $h_\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ et $q : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ sont **continues et strictement positives**.

3. Montrer que les ensembles compacts C tels que $\text{Leb}(C) > 0$ sont "1-small" (vous préciserez la constante de minoration)
Solution.

Soit C un compact de $\mathbb{R}^k$ tel que $\text{Leb}(C) > 0$. Alors, $\pi(C) = \int_C \underbrace{h_\pi(y)}_{>0}\text{Leb}(\text{d}y) > 0$. De plus, pour tout $x \in C$,

$$\begin{aligned} P(x,A) \geq P(x,A\cap C) &\geq \int_{A\cap C}\left(1 \wedge \frac{h_\pi(y)q(y,x)}{h_\pi(x)q(x,y)}\right)q(x,y)\text{Leb}(\text{d}y) = \int_{A\cap C}\left(\frac{q(x,y)}{h_\pi(y)} \wedge \frac{q(y,x)}{h_\pi(x)}\right)h_\pi(y)\text{Leb}(\text{d}y) \\ &\geq \underbrace{\left(\inf_{(u,v)\in C\times C}\left(\frac{q(u,v)}{h_\pi(v)}\right)\times \pi(C)\right)}_{\varepsilon}\frac{\pi(A\cap C)}{\pi(C)} \end{aligned}$$

Notez que $\varepsilon > 0$ car $\pi(C) > 0$ et $(u,v) \mapsto q(u,v)/h_\pi(v)$ est continue, strictement positive, donc son infimum sur le compact $C \times C$ est strictement positif. □

4. Montrer que le noyau P est apériodique.
Solution.

Nous avons vu que P est irreductible. Soit C un compact tel que $\text{Leb}(C) > 0$ alors $\pi(C) > 0$ et comme π est une mesure d'irreductibilité maximale, on tire que C est accessible. Il est de plus $(1,\varepsilon\pi_C)$-small où $\pi_C(A) = \frac{\pi(A\cap C)}{\pi(C)}$. Comme $\inf_{x\in C} P(x,C) \geq \varepsilon > 0$, on tire que P est aperiodique. □

Nous supposons maintenant (et pour le reste de l'exercice) que $q(x,y)$ ne dépend pas de x. On note alors $q(x,y) = q(y)$.

5. Montrer que si $q(y)/\pi(y) \geq \beta$ pour tout $y \in \mathbb{R}^k$, alors $\mathbb{R}^k$ est un "ensemble small".
Solution.

On a pour tout $(x,A) \in \mathbb{R}^k \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$P(x,A) \geq \int_A \left(\frac{q(y)}{h_\pi(y)} \wedge \frac{q(x)}{h_\pi(x)} \right) h_\pi(y) \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) \geq \beta \pi(A)$$

donc $\mathbb{R}^k$ est un ensemble small. □

6. Déterminer $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, $\|\delta_x P^n - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq 2(1-\varepsilon)^n$.
Solution.

Avec la question précédente et le lemme 18.2.7, $\mathbb{R}^k$ est un $(1,\beta)$-Doeblin set et donc le coefficient de Dobrushin vérifie $\Delta(P) \leq 1-\beta$, ce qui implique, via Theorem 18.2.4, que pour tout $x \in \mathbb{R}^k$, $\|\delta_x P^n - \pi\|_{\mathrm{TV}} \leq \|\delta_x - \pi\|_{\mathrm{TV}} (1-\varepsilon)^n \leq 2(1-\varepsilon)^n$. □

Nous supposons maintenant que pour tout $n > 0$, $\mathrm{Leb}(D_n) > 0$ où

$$D_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^k : q(x)/h_\pi(x) \leq n^{-1} \right\}.$$

On sait que si le noyau Markovien est géométriquement ergodique alors il existe un "small set" C et $\kappa > 1$ tel que $\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x[\kappa^{\sigma_C}] < \infty$.

7. Montrer que pour tout $x \in D_n$, pour tout $\ell \geq 1$ et tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$,

$$P^\ell(x,A) \leq n^{-1}\pi(A) + P^{\ell-1}(x,A),$$

avec la convention usuelle $P^0(x,A) = \mathbb{1}_A(x)$. En déduire que si C est un $(m, \varepsilon\nu)$-small set, alors pour tout $n > (2m)/\varepsilon$, on a $\mathrm{Card}(D_n \cap C) \leq 1$.

Solution.

Soit $x \in D_n$. Alors pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^k)$ et $\ell \geq 1$,

$$P^\ell(x,A) = \int_{\mathbb{R}^k} \left(\underbrace{\frac{q(y)}{h_\pi(y)} \wedge \frac{q(x)}{h_\pi(x)}}_{\leq q(x)/h_\pi(x) \leq n^{-1}} \right) h_\pi(y) P^{\ell-1}(y,A) \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) + \underbrace{[1-\bar{\alpha}(x)]}_{\leq 1} P^{\ell-1}(x,A) \leq n^{-1} \underbrace{\pi P^{\ell-1}(A)}_{\pi(A)} + P^{\ell-1}(x,A)$$

En itérant l'inégalité, on obtient pour tout $n > (2m)/\varepsilon$:

$$P^m(x,A) \leq n^{-1} m \pi(A) + \mathbb{1}_A(x) < \varepsilon/2 + \mathbb{1}_A(x).$$

Faisons un raisonnement par l'absurde. Supposons $\mathrm{Card}(D_n \cap C) > 1$. Alors, il existe $x, x' \in (D_n \cap C)$ avec $x \neq x'$. Donc, par l'inégalité précédente, pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$,

$$\varepsilon\nu(A) \leq P^m(x,A) < \varepsilon/2 + \mathbb{1}_A(x)$$
$$\varepsilon\nu(A) \leq P^m(x,A) < \varepsilon/2 + \mathbb{1}_A(x')$$

En prenant $A = \mathbb{R} \setminus \{x'\}$ dans la première inégalité et $A = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ dans la deuxième, il vient

$$\varepsilon = \varepsilon\nu(\underbrace{\mathbb{R}}_{(\mathbb{R}\setminus\{x'\}) \cup (\mathbb{R}\setminus\{x\})}) \leq \varepsilon\nu(\mathbb{R} \setminus \{x'\}) + \varepsilon\nu(\mathbb{R} \setminus \{x\}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

On aboutit à une contradiction, on tire donc $\mathrm{Card}(D_n \cap C) \leq 1$.

□

Pour $x \in \mathbb{R}^k$, nous notons

$$A_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : [\pi(y)/q(y)][q(x)/\pi(x)] \geq 1 \right\}$$
$$R_x = \left\{ y \in \mathbb{R}^k : [\pi(y)/q(y)][q(x)/\pi(x)] < 1 \right\}$$

8. Soit $x \in D_n$. Montrer que pour tout $y \in A_x$, on a $1 \leq n^{-1}[\pi(y)/q(y)]$. En déduire que $P(x, A_x \setminus \{x\}) \leq n^{-1}$.
Solution.

Pour tout $x \in D_n$ et $y \in A_x$,
$$1 \leq \frac{\pi(y)/q(y)}{\pi(x)/q(x)} \leq n^{-1}[\pi(y)/q(y)]$$
D'où l'on tire, $P(x, A_x \setminus \{x\}) = \int_{A_x} q(y)\mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) \leq n^{-1}\pi(A_x) \leq n^{-1}$ □

9. Montrer que pour tout $x \in D_n$, on a $P(x, R_x) \leq n^{-1}$.
Solution.

On a par définition de R_x et en notant que $x \notin R_x$,
$$P(x, R_x) = \int_{R_x} q(y) \frac{\pi(y)/q(y)}{\pi(x)/q(x)} \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) \leq n^{-1}\pi(R_x) \leq n^{-1}$$
□

10. Montrer que pour tout $x \in D_m$, on a $P(x, \{x\}) \geq (1 - 2/n)$. En déduire que pour tout $x \in D_n \cap C^c$, on a $\mathbb{P}_x(\sigma_C > k) \leq (1 - 2/n)^k$.
Solution.

Par les deux questions précédentes, et en remarquant que $x \notin R_x$,
$$1 - P(x, \{x\}) = P(x, \mathbb{R}^k \setminus \{x\}) = P(x, A_x \setminus \{x\}) + P(x, R_x) \leq 2/n$$
d'où la première inégalité souhaitée. En prenant $x \in D_n \cap C^c$ et en itérant l'inégalité précédente, on tire
$$\mathbb{P}_x(\sigma_C > k) \geq (1 - 2/n)^k$$
□

11. Montrer que le noyau Markovien P n'est pas géométriquement ergodique.
Solution.

Choisissons n suffisamment grand pour que
$$(1 - 2/n)\kappa > 1 \quad \text{et} \quad n > (2m)/\varepsilon \quad \text{(voir question 7)}$$
Alors $\mathrm{Card}(D_n \cap C) \leq 1$ (question 7), si bien que $\mathrm{Leb}(D_n \cap C^c) = \mathrm{Leb}(D_n) - \mathrm{Leb}(D_n \cap C) = \mathrm{Leb}(D_n) > 0$. De plus pour tout $x \in D_n \cap C^c$,
$$\mathbb{E}_x\left[\frac{\kappa^{\sigma_C} - 1}{\kappa - 1}\right] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k \mathbb{1}\{\sigma_C > k\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k \mathbb{P}_x(\sigma_C > k) \geq \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - 2/n)\kappa]^k = \infty$$
Ce qui implique que pour tout $x \in C$,
$$\mathbb{E}_x[\kappa^{\sigma_C}] \geq \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_1 \in D_n \cap C^c\}} \kappa^{1+\sigma_C \circ \Theta}] = \kappa \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{X_1 \in D_n \cap C^c\}} \underbrace{\mathbb{E}_{X_1}[\kappa^{\sigma_C}]}_{=\infty}] = \infty$$
où on a utilisé d'une part que $\sigma_C = 1 + \sigma_C \circ \Theta$ si $X_1 \notin C$ et d'autre part que
$$\mathbb{P}_x(X_1 \in D_n \cap C^c) \geq \int_{D_n \cap C^c} \underbrace{\alpha(x, y)q(y)}_{>0} \mathrm{Leb}(\mathrm{d}y) > 0,$$

car $\mathrm{Leb}(D_n \cap C^c) = \mathrm{Leb}(D_n) > 0$. Finalement pour tout $x \in C$, $\mathbb{E}_x[\kappa^{\sigma_C}] = \infty$ ce qui est contradictoire avec $\sup_{x\in C} \mathbb{E}_x[\kappa^{\sigma_C}] < \infty$. Donc P n'est pas géométriquement ergodique. □

Exercise 3

Soit $(\mathsf{X}, \mathscr{X})$ un espace mesurable, P un noyau de Markov irréductible et récurrent, ψ une mesure d'irréductibilité maximale. Pour A un ensemble accessible, définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$G_n = \{x \in A : \mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) < 1 - 1/n\},$$

où pour $B \in \mathscr{X}$, $\sigma_B = \{k \geq 1 : X_k \in B\}$ est le premier temps de retour en B.

1. Montrer que pour tout $x \in G_n$, $\mathbb{P}_x(\sigma_{G_n} < \infty) \leq 1 - 1/n$.
Solution.

On a $G_n \subset A$ donc $\sigma_A \leq \sigma_{G_n}$ donc pour tout $x \in G_n$, $\mathbb{P}_x(\sigma_{G_n} < \infty) \leq \mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) \leq 1 - 1/n$, où la dernière inégalité vient de la propriété de Markov fort. □

2. En déduire que $\sup_{x\in G_n} U(x, G_n) \leq n$ où U est le noyau potentiel de P.
Solution.

On a pour tout $x \in G_n$, $U(x, G_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(\sigma_{G_n}^{(k)} < \infty) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 1/n)^k = n$ □

3. Montrer que $\psi(A_0) = 0$ où $A_0 = \{x \in A : \mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) < 1\}) = 0$.
Solution.

Comme P est irreductible récurrent, G_n ne peut pas être accessible (sinon il serait recurrent ce qui n'est pas possible, vu la question précédente). Donc $\psi(G_n) = 0$ et comme $A_0 = \cup_{n\geq 1} G_n$, il vient $\psi(A_0) = 0$. □

Nous posons $A_1 = A \setminus A_0 = \{x \in A : \mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) = 1\}$ et

$$A_{10} = \left\{x \in A_1 : \mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) = 0\right\}, \qquad A_{11} = \left\{x \in A_1 : \mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) > 0\right\},$$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathsf{X}$,

$$\mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) \geq \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\sigma_{A_{11}} < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\sigma_{A_{11}}}}(\sigma_{A_0} < \infty)]$$

En déduire que $\psi(A_{11}) = 0$.
Solution.

Pour tout $x \in \mathsf{X}$, par Markov fort,

$$\mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) \geq \mathbb{P}_x(\sigma_{A_{11}} < \infty, \sigma_{A_0} \circ \Theta_{\sigma_{A_{11}}} < \infty) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\sigma_{A_{11}} < \infty\}} \mathbb{P}_{X_{\sigma_{A_{11}}}}(\sigma_{A_0} < \infty)]$$

Comme $\psi(A_0) = 0$, A_0 n'est pas accessible et donc il existe $x \in \mathsf{X}$ tel que $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) = 0$. L'inégalité précédente montre alors que $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\sigma_{A_{11}} < \infty\}} \underbrace{\mathbb{P}_{X_{\sigma_{A_{11}}}}(\sigma_{A_0} < \infty)}_{>0}] = 0$ donc $\mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{\sigma_{A_{11}} < \infty\}}] = \mathbb{P}_x(\sigma_{A_{11}} < \infty) = 0$ donc A_{11} n'est pas accessible donc $\psi(A_{11}) = 0$.

□

5. Montrer que pour $x \in A_{10}$, $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_{11}} < \infty) = 0$.
Solution.

Par définition de A_{10}, pour tout $x \in A_{10}$, $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) = 0$, ce qui implique $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_{11}} < \infty) = 0$ par la question précédente. $\square$

6. Montrer que pour tout $x \in A_{10}$, $\mathbb{P}_x(N_{A_{10}} = \infty) = 1$ où N_B est le nombre de visites à B.
Solution.

Par définition de A_{10}, pour tout $x \in A_{10}$, on a $x \in A_1$ (ie $x \in A$ et $\mathbb{P}_x(\sigma_A < \infty) = 1$) et de plus, $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_0} < \infty) = 0$. Comme $A = A_0 \cup A_1$, on tire $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_1} < \infty) = 1$. Or $A_1 = A_{10} \cup A_{11}$ et $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_{11}} < \infty) = 0$, ce qui implique pour tout $x \in A_{10}$, on a $\mathbb{P}_x(\sigma_{A_{10}} < \infty) = 1$ et par une récurrence claire (en utilisant Markov fort), pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}_x(\sigma^{(k)}_{A_{10}} < \infty) = 1$. Donc $1 = \mathbb{P}_x(\cap_{k \in \mathbb{N}}\{\sigma^{(k)}_{A_{10}} < \infty\}) = \mathbb{P}_x(N_{A_{10}} = \infty)$. $\square$