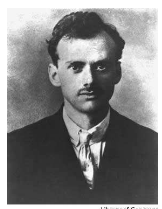
MATHEMATIQUES

MAT 3101




INTRODUCTION A LA THEORIE DE L'INTEGRATION

ET ELEMENTS D'ANALYSE

Randal Douc

Table des matières

Introduction et conseils de lecture

Ce cours vise essentiellement à fournir des outils mathématiques notamment liés à la théorie de l'intégration qui ont des applications dans de nombreux domaines aussi bien l'aléatoire (la théorie de la mesure et de l'intégration est extrêmement utilisée en probabilités et statistiques) que le traitement du signal, les communications numériques ou la physique mathématique...

Il a été bâti à partir des divers cours existants et nous citerons simplement les contributions les plus importantes : les parties 1 et 2 ont été conçus à partir des cours d'André Le Breton, Jacques Neveu et François Le Drappier, la partie 3 s'inspire des notes de Francis Maisonneuve, Michèle Audin, la partie 4, de l'excellent polycopié de Jean Michel Bony, les parties 5 et 6 sont issues du livre de Walter Appel.

Ressources, méthodes, travail, organisation.

Pour le cours de MAT3101, vous avez à votre disposition

1. Le polycopié de cours- Disponible en version papier ou sous forme électronique (fichier pdf) sur Moodle.
2. Le polycopié d'exercices- Disponible en version papier ou sous forme électronique (fichier pdf) sur Moodle.
3. Les transparents du cours- Disponible sous forme électronique (fichier pdf) sur Moodle.
4. Une foire aux questions- Disponible sous forme électronique (fichier pdf) sur Moodle.
5. Les annales des années précédentes- Disponible en version papier ou sous forme électronique (fichier pdf) sur Moodle. La correction d'un certain nombre d'examens est téléchargeable sur Moodle.
6. Les mots clés- : au début de chaque chapitre.
7. Les points essentiels- : en fin de chaque chapitre.
8. Les notices bibliographiques- : en fin de chaque chapitre, quelques biographies de mathématiciens.

Pour que ce cours vous soit vraiment profitable, il est conseiller d'opérer de la facon suivante :

- **Avant chaque amphi** : faire un premier survol du cours en faisant un va et vient entre les transparents téléchargeables sur Moodle et le polycopié (inutile dans ce premier survol de regarder les preuves mais seulement concentrez vous à exhiber les théorèmes importants et à repérer les commentaires sur l'utilisation pratique de ces théorèmes). Dans le polycopié, les résultats les plus importants et les conséquences pratiques fondamentales sont identifiées soit sous forme d'encadrés, ou bien sous forme de mémo (les mémos sont repérables par une barre noire dans la marge).
- **Après chaque amphi** : voir sur le polycopié les points du chapitre qui nécessitent plus d'efforts (on peut alors lire les preuves de certains théorèmes et visiter les annexes au besoin).
- **Avant chaque séance de TD** : ne pas hésiter à refaire les exercices déjà vus pour bien se fixer les preuves.
- **Après chaque séance de TD** : Commencer dès à présent à faire certains exercices des annales (ceux qui sont en rapport direct avec là où on en est dans le cours). Révisez avec les **vidéos** pour être sûr de ne rien avoir oublié de fondamental.

Notations et Rappels

Nous donnons ici quelques notations usuelles qui seront utilisées tout au long de ce cours.

$\mathbf{1}_{x\in A} = \mathbf{1}(x \in A)$	$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$\mathbf{1}_A$	Fonction $\omega \mapsto \mathbf{1}_A(\omega) = \mathbf{1}(\omega \in A)$
i.e.	id. est. (c'est à dire)
$\mathcal{P}(\Omega)$	Ensemble des parties de Ω.
A^c	$\Omega \setminus A$, complémentaire de A dans Ω
$\overline{\lim}_n a_n$	limite sup : $\lim_{n\to\infty} \sup_{p\geq n} a_p$
$\underline{\lim}_n a_n$	limite inf : $\lim_{n\to\infty} \inf_{p\geq n} a_p$
$A \supset B$	A contient B ou B est inclus dans A
$A \setminus B$	$\{x \in A; x \notin B\}$
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\bar{\mathbb{R}}^+$	$[0, \infty]$
a^+	$\max\{a, 0\}$
a^-	$\max\{-a, 0\}$
$\mathbf{i}\mathbb{R}$	$\{\mathbf{i}iy, y \in \mathbb{R}\}$ ensemble des imaginaires purs

Et on remarquera les relations $a = a^+ - a^-$ et $|a| = a^+ + a^-$

Rappels

Définition 0.0.1 On se place dans un espace vectoriel normé (de norme $|\cdot|$). On dit que f *est différentiable en* a ssi pour tout h dans un voisinnage de a,

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + r(h)$$

où df_a est une forme linéaire et $\lim_{h\to 0} |r(h)|/|h| = 0$. On note encore $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(h)$.

Convergence des séries de fonctions

Définition 0.0.2 Soient une suite de fonctions (f_n) de Ω à valeurs dans un espace vectoriel normé (de norme $|\cdot|$). La série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge

i) *simplement* ssi la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout x de Ω.

ii) *absolument* ssi la série $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout x de Ω.

iii) *uniformément* ssi elle converge simplement et $\sup_x |\sum_{n\geq p} f_n(x)|$ converge vers 0 lorsque $p \to \infty$.

Chapitre 1

Théorie de la mesure

Sommaire

Mots clés 1.1 tribus, tribus engendrées, tribu produit, tribu borélienne, mesure, mesure produit, mesure de Lebesgue, existence de mesures, égalité de deux mesures.

1.1 Espaces mesurables

1.1.1 Tribu

On considère un ensemble de quantités d'intérêt Ω. Cela peut être un ensemble fini, un ensemble dénombrable ($\mathbb{N}$ par exemple), ou même indénombrable ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$) ou même un ensemble de fonctions. En théorie des probabilités, cet ensemble sera typiquement l'espace des réalisations, mais dans le cadre de ce cours, nous n'avons pas besoin de l'identifier de cette manière. Sur Ω, on va s'intéresser à une famille de sous ensembles qui vont satisfaire un certain nombre de propriétés de stabilité :

Définition 1.1.1 Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties d'un ensemble Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* sur Ω ssi

i) L'ensemble $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) Si $A \in \mathcal{F}$ alors le complémentaire $A^c \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, (►Stabilité par complémentation)

iii) Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ alors $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. (►Stabilité par intersection dénombrable)

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ est un *espace mesurable*. On remarquera aussi que si A et B sont dans $\mathcal{F}$ alors $A \setminus B = A \cap (B^c)$ est aussi dans $\mathcal{F}$, ce qu'on peut traduire en mots par la *propriété de stabilité par le* **signe moins ensembliste**. La tribu la plus petite possible $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{\emptyset, \Omega\}$ sera appelée *tribu triviale*. On fera bien attention d'une part que les **singletons** ne sont pas nécessairement dans la tribu et d'autre part que la notion de stabilité par intersection est donnée pour une intersection **dénombrable**. Par contre, l'ensemble $\emptyset$ est nécessairement dans $\mathcal{F}$ puisque $\emptyset = (\Omega)^c$.

Remarque 1.1.1 On peut d'ailleurs trouver aussi dans la littérature d'autres définitions équivalentes de la tribu, comme par exemple la suivante : Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties d'un ensemble Ω. On dit que $\mathcal{F}$ est une *tribu* sur Ω ssi

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) Si $A \in \mathcal{F}$ alors le complémentaire $A^c \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, (►Stabilité par complémentation)

iii) Si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ alors $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$. (►Stabilité par union dénombrable)

Cette *définition* ne sera pas utilisée dans ce cours ; on utilisera plutôt la définition 1.1.1 ; par contre, on verra dans la suite que la stabilité par union dénombrable est une conséquence de la définition 1.1.1.

La stabilité par intersection dénombrable implique notamment la *stabilité par intersection finie*. En effet, donnons nous une famille finie d'ensembles de $\mathcal{F}$, $(A_i)_{1\le i\le n}$. Alors en posant $A_k = \Omega$ pour tout $k > n$, il vient $\cap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \cap_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{F}$ du fait de la propriété iii) de la Définition 1.1.1.

Stabilité par réunion dénombrable

Une propriété quasi immédiate issue de la définition de la tribu est la stabilité par *réunion dénombrable*. Notons en effet qu'un point qui n'appartient pas à la réunion de tous les A_i n'appartient à aucun des A_i et donc appartient à l'intersection de leur complémentaire. Ceci peut se traduire mathématiquement par

$$(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c \quad \text{ou encore} \quad \cup_{i=1}^{\infty} A_i = (\cap_{i=1}^{\infty} (A_i)^c)^c$$

Ce qui conduit en utilisant ii) et iii) de la définition 1.1.1 :

Lemme 1.1.2. Stabilité par réunion dénombrable- *Si $\mathcal{F}$ est une tribu et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$ alors $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Comme pour l'intersection, la stabilité par réunion dénombrable implique notamment la *stabilité par réunion finie*. Soit donc une famille finie d'ensembles de $\mathcal{F}$, $(A_i)_{1\le i\le n}$. Il suffit cette fois-ci de poser $A_k = \emptyset$ pour tout $k > n$ et il vient que $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \cup_{1\le i\le n} A_i \in \mathcal{F}$ par le Lemme 1.1.2.

Tribu engendrée

Voyons d'abord deux exemples de tribus *explicites*. La classe $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω est clairement une tribu. De plus, si $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de Ω avec I fini ou dénombrable (i.e. les A_i sont deux-à-deux disjoints et leur réunion est Ω) alors on peut vérifier simplement que l'ensemble $\{\cup_{i\in J} A_i, \text{ où } J \subset I\}$ est une tribu où l'on a utilisé la convention $\cup_{i\in J} A_i = \emptyset$ si $J = \emptyset$. Néanmoins, à part ces deux exemples, il n'y a pas d'écriture proprement explicite des éléments de la tribu à l'aide des symboles de réunion $\cup$, d'intersection $\cap$ ou du passage au complémentaire. En fait, la plupart des tribus que nous manipulerons seront obtenus par le procédé (non explicite) issu de la proposition suivante.

Proposition 1.1.3. *Pour tout $\mathcal{C}$, famille de parties de Ω, il existe une tribu $\sigma(\mathcal{C})$ sur Ω vérifiant :*

i) $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

ii) Pour toute tribu $\mathcal{T}$, on a $(\mathcal{C} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{T})$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, dash, "\text{inclus dans}"] \arrow[dr] & \sigma(\mathcal{D}) \\ \mathcal{D} \arrow[r, dash, "\text{inclus dans}"'] \arrow[ur] & \sigma(\mathcal{C}) \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})$$

FIGURE 1.1 – Egalité de deux tribus engendrées : Proposition 1.1.4

$\sigma(\mathcal{C})$ est donc la "plus petite" tribu contenant $\mathcal{C}$. Cette tribu sera notée dans toute la suite $\sigma(\mathcal{C})$ et on l'appellera tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

En d'autres termes, si on a à notre disposition une famille de parties quelconques $\mathcal{C}$, on peut toujours l'inclure dans une tribu et même choisir la plus petite tribu qui la contienne, notée $\sigma(\mathcal{C})$. Nous donnons maintenant un critère simple d'égalité entre deux tribus engendrées par des familles de parties différentes.

Proposition 1.1.4. *Deux classes (ou familles de parties) $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ engendrent la même tribu ($\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{D})$) si elles vérifient la double inclusion :*

$$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{D}) \quad \text{et} \quad \mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$$

Une façon d'utiliser de théorème consistera à écrire tout élément de $\mathcal{C}$ en terme de réunion, d'intersection ou de passage au complémentaire d'éléments de $\mathcal{D}$ puis à faire la même chose pour tout élément de $\mathcal{D}$ en fonction des éléments de $\mathcal{C}$, ce qui permettra alors d'identifier les tribus engendrées en vertu de cette proposition.

DÉMONSTRATION. (des Propositions 1.1.3 et 1.1.4) Soit $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{T}; \mathcal{T} \text{ tribu de } \Omega \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{T}\}$, l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{C}$. On a clairement que $\mathcal{A}$ est non vide puisqu'il contient au moins $\mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$). Alors, on montre facilement que $\cap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}}\mathcal{T}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$. De plus, par construction, toute tribu contenant $\mathcal{C}$ est nécessairement dans $\mathcal{A}$ et donc contient nécessairement $\cap_{\mathcal{T}\in\mathcal{A}}\mathcal{T}$, ce qui achève la preuve de la proposition 1.1.3. La preuve de la proposition 1.1.4 vient directement de l'inclusion $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{D})$ entraîne $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\sigma(\mathcal{D}))$ et comme $\mathcal{D}$ est déjà une tribu, $\sigma(\sigma(\mathcal{D})) = \sigma(D)$. Finalement $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{D})$ implique $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{D})$. ■

Exemple 1.1.1 La tribu engendrée par l'ensemble A est

$$\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}.$$

Exemple 1.1.2 La tribu engendrée par la partition $(A_i)_{i\in I}$ avec I fini ou dénombrable est

$$\{\cup_{i\in J} A_i, \ \text{où } J \subset I\},$$

avec la convention $\cup_{i\in J} A_i = \emptyset$ si $J = \emptyset$.

Les tribus qui nous intéresserons par la suite seront essentiellement construites comme cela. Une famille $\mathcal{C}$ de parties nous intéresse et de façon à pouvoir utiliser certains outils qui ne sont construits que sur les tribus (comme les mesures par exemple), nous les incluons dans une tribu en vertu de la Proposition 1.1.3. Le fait qu'il est impossible de donner une description explicite de tous les éléments d'une tribu engendrée n'est pas un inconvénient, ni du point de vue théorique (l'objet "tribu engendrée" existe et sert principalement à assurer un confort mathématique) ni du point de vue pratique (les éléments qu'il importe de décrire en pratique sont des éléments particuliers et donc pour ces éléments particuliers, on pourra savoir s'ils sont dans la tribu en les écrivant (ou non) comme intersection et réunion dénombrable d'éléments de la tribu).

Une classe d'ensembles particulièrement importante est celle des ouverts de $\mathbb{R}^k$. Ce n'est pas une tribu puisque le complémentaire d'un ouvert n'est pas un ouvert en général, par contre on peut l'inclure dans une tribu en vertu de la Proposition 1.1.3 et même la plus petite tribu possible. La plus petite tribu contenant les ouverts sera appelée tribu *borélienne* de $\mathbb{R}^k$. On la notera dans toute la suite $\mathcal{B}_k$. Un *borélien* sera un élément de la tribu borélienne. On montre que les ouverts, les fermés, les intervalles finis ou infinis, (ou les pavés qui sont l'extension des intervalles en dimension supérieure à 1) sont des boréliens.

EXERCICE 1.1 Montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ correspond à la tribu engendrée par $\{]\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Mesure

1.2.1 Définition et exemples

Une tribu est donc une famille de sous ensembles de Ω. Un élément de la tribu est alors un sous ensemble de Ω. Une fois la notion de tribu définie, on va chercher à associer à une partie d'un ensemble (i.e. un élément de la tribu) un nombre réel positif. La mesure sera une sorte d'extension de la "taille" ou bien de la "surface" ou du "volume". Pour comprendre le lien entre la théorie de la mesure et celle des probabilités, considérons une expérience aléatoire dont Ω est l'ensemble des tous les résultats possibles. Définir une (loi de) probabilité, c'est se donner une fonction qui à un événement (partie de Ω) associe un nombre (dans $[0,1]$) traduisant les chances qu'il a de se réaliser. D'où la notion de mesure. Néanmoins dans ce cours, les mesures seront considérées dans leur sens général et nous ne nous restreindrons donc pas aux mesures de probabilités. Plaçons nous maintenant dans un cadre plus mathématique :

Définition 1.2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On dit que $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est une *mesure positive* ssi elle vérifie la propriété de σ-additivité définie par :

▶ Pour tous $A_i \in \mathcal{F}$ $(i \in \mathbb{N})$ tels que (A_i) sont disjoints deux à deux (i.e, $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a

$$\nu\left(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(A_i) \qquad (\blacktriangleright\sigma\text{-ADDITIVITÉ})$$

Si de plus, $\nu(\Omega) < \infty$ on dira que ν est une mesure *finie*. Si $\nu(\Omega) = 1$, on dira que ν une mesure de *probabilité*.

A part pour la mesure infinie (i.e. $\nu(A) = \infty$ pour tout $A \in \mathcal{F}$), la relation ii) implique que $\nu(\emptyset) = 0$. En effet, prenons A tel que $\nu(A) < \infty$ alors comme $A \cap \emptyset = \emptyset$, il vient par la propriété de σ-additivité, $\nu(A) = \nu(A \cup \emptyset) = \nu(A) + \nu(\emptyset)$ d'où $\nu(\emptyset) = 0$.

On souligne qu'une mesure positive est à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ et peut donc prendre des valeurs infinies. Ainsi la propriété de σ-additivité tiendra compte des relations usuelles : $\infty + \infty = \infty$ et $\infty + a = \infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On appellera dans toute la suite *espace mesuré* le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Nous présentons d'emblée quelques exemples très importants pour les applications :

Exemple 1.2.1 MESURE DE COMPTAGE-. Notons

$$\nu(A) = \begin{cases} \text{nombre d'éléments de } A & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelé *mesure de comptage*.

Exemple 1.2.2 MESURE DE DIRAC-. Si $x \in \Omega$, alors δ_x défini par $\delta_x(A) = \mathbf{1}(x \in A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelé *mesure de dirac* en x.

Exemple 1.2.3 PEIGNE DE DIRAC-. Si $(x_i) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ alors la mesure $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$ est extrêmement utilisée en Traitement du signal et sera appelée *peigne de Dirac*.

Exemple 1.2.4 MESURE DE LEBESGUE-. On admettra l'existence et l'unicité d'une mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ telle que $\lambda([a,b]) = b - a$ pour tout intervalle fini $[a,b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Cette mesure sera appelée *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$; elle correspond intuitivement à la notion de "longueur de l'ensemble".

La mesure de Lebesgue sera extrêmement utilisée par la suite. Contrairement à la mesure de comptage, la mesure de Lebesgue ne charge pas les singletons, i.e. $\lambda(\{a\}) = \lambda([a,a]) = a - a = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Enfin, nous terminerons par une propriété très simple que le lecteur pourra montrer à titre d'exercice.

Lemme 1.2.2. *Pour tout $A, B \in \mathcal{F}$,*

$$\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$$

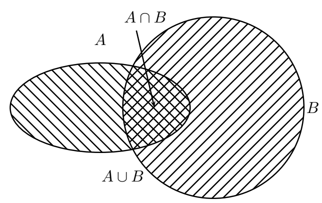


FIGURE 1.2 – $\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \nu(A) + \nu(B)$

1.2.2 Propriétés Immédiates : Monotonie, Sous additivité et continuité

De la définition, nous pouvons extraire quelques propriétés relativement immédiates extrêmement utilisées dans la pratique :

Proposition 1.2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré.*

i) Si $A \subset B$ alors $\nu(A) \leq \nu(B)$. (▶MONOTONIE)

ii) Pour toute suite $A_1, A_2, \ldots$, on a $\nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ (▶ SOUS ADDITIVITÉ)

iii) Pour toute suite emboîtée, $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, on a

$$\nu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \quad (\blacktriangleright \text{ CONTINUITÉ})$$

iv) Pour toute suite $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ avec $\nu(A_1) < \infty$,

$$\nu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) \quad (\blacktriangleright \text{ CONTINUITÉ})$$

DÉMONSTRATION. L'ingrédient essentiel des différentes preuves est d'utiliser la σ-additivité et pour cela, de se ramener à des ensembles disjoints.

i) Il suffit de remarquer que A et $B \setminus A$ sont disjoints et $B = A \cup (B \setminus A)$. Par σ-additivité, il vient $\nu(B) = \nu(A) + \nu(B \setminus A) \geq \nu(A)$ par positivité de la mesure ν.

ii) Les (A_i) étant quelconques, ils ne sont pas a priori deux à deux disjoints. Un travail de réécriture est d'abord nécessaire : écrivons donc $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ avec

$$B_i = \begin{cases} A_i \setminus \left(\cup_{j=1}^{i-1} A_j\right) & \text{si } i \geq 2 \\ A_1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Et on voit clairement que les B_i sont deux à deux disjoints et de plus, par propriété de monotonicité, $\nu(B_i) \leq \nu(A_i)$. On peut enfin appliquer la σ-additivité de la mesure, il vient

$$\nu(\underbrace{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\cup_{i=1}^{\infty} B_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$$

iii) Soient $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, en reprenant la définition de B_i donnée en (1.1), il vient par σ-additivité sur les (B_i),

$$\nu(\underbrace{\cup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\cup_{i=1}^{\infty} B_i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$$

où la dernière égalité vient directement du fait que les (A_i) étant emboîtés, $\cup_{i=1}^{n} B_i = A_n$. La preuve est achevée en notant que $A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$ par "emboîtement" des A_i.

iv) La dernière propriété pour des ensembles $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ avec $\nu(A_1) < \infty$ est laissée au lecteur à titre d'exercice.

■

Exercice 1.2 Montrer que la condition $\nu(A_1) < \infty$ dans la Proposition 1.2.3 iv) est nécessaire. **Indication :** On pourra choisir pour ν la mesure de comptage, et $A_n = \{m \in \mathbb{N}; m \geq n\}$ puis montrer successivement que $\nu(A_n) = \infty$ et $\nu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \nu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$.

Il est facile en utilisant la sous-additivité (Prop 1.2.3, ii) de montrer que

Lemme 1.2.4. *Si pour tout i, $\nu(A_i) = 0$ alors $\nu\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0$. Puis par complémentation, si ν est une mesure de probabilité (i.e. ν est une mesure positive et $\nu(\Omega) = 1$)et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\nu(B_i) = 1$ alors $\nu\left(\cap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = 1$.*

Ce lemme nous apprend que si on a une collection d'ensembles de mesure nulle, même si on prend leur réunion (donc un ensemble plus grand que n'importe lequel d'entre eux), on restera avec un ensemble de mesure nulle. Et par complémentation, si on a une collection d'ensembles de probabilité 1, et si on considère leur intersection, (donc un ensemble plus petit que n'importe lequel d'entre eux), on reste malgré tout avec un ensemble de mesure 1.

Exercice d'application 1.1 Montrer que pour si $A \in \mathcal{B}$ est un ensemble dénombrable. Alors, la mesure de Lebesgue ne charge pas A, i.e.

$$\lambda(A) = 0$$

Par exemple, $\mathbb{Q}$ a beau être un ensemble dense dans $\mathbb{R}$, il est dénombrable et donc par le lemme précédent, $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. Nous terminons par une notion fortement utilisée en probabilité lorsqu'on veut parler d'événement qui se réalise "presque toujours" dans le sens où l'événement complémentaire est de probabilité nulle. Dans le cadre général de la théorie de la mesure, ce type de notion se traduit par les deux définitions suivantes :

Définition 1.2.5 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré.

i) On dira que A est *ν-négligeable* pour ν s'il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}$ telle que $A \subset N$ et $\nu(N) = 0$.

ii) On dira que A est vraie *ν-presque partout* (ou $\nu-$p.p.) si le complémentaire de A est négligeable.

Par exemple, quand on prend un réel quelconque $x \in \mathbb{R}$, la propriété "x est un irrationnel" est une propriété vraie presque partout *par rapport à la mesure de Lebesgue,* λ ; en effet soit $A = \{irrationnels\}$, on a $A^c = \mathbb{Q}$ et on vient de voir que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

Avant de revenir sur les points essentiels du chapitre, nous attirons l'attention que ce chapitre ne présente pas de technicité particulière. La seule difficulté peut être vient de ce que les éléments que nous manipulons sont des ensembles ou même parfois des ensembles d'ensembles (ou ensembles de parties), il faudra donc bien faire attention à savoir ce que nous utilisons : on veillera par exemple, à bien distinguer le symbole $\in$ du symbole $\subset$... Si A est un ensemble de Ω et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω, alors $A \in \mathcal{F}$ a bien un sens mais pas $A \subset \mathcal{F}$; par contre $A \subset B$ a bien un sens lorsque A et B sont deux ensembles de Ω.

1.3 Points essentiels du chapitre

a) Les deux notions importantes du chapitre sont les tribus et les mesures.

b) Les tribus ne sont pas en général explicitables mais en général, on considérera la tribu engendrée par certains ensembles d'intérêt.

c) Des exemples de mesures concernent aussi bien des mesures discrètes (mesure de Dirac) que des mesures "continues" (mesure de Lebesgue).

d) On a vu trois propriétés fondamentales des mesures : monotonie, sous additivité, continuité.

e) Il faut typiquement savoir : montrer que quelque chose est une tribu, que deux tribus engendrées coincident, que que quelque chose est une mesure et connaitre les propriétés fondamentales des mesures.

1.4 Un peu d'histoire

Paul Dirac (1902-1984). Source : wikipedia.

Paul Adrien Maurice Dirac est un physicien et mathématicien britannique né le 8 août 1902 à Bristol et mort le 20 octobre 1984 à Tallahassee, Floride (États-Unis).

Il est l'un des pères de la mécanique quantique et reste célèbre pour avoir prévu l'existence de l'antimatière (positron).

Son père, Charles Dirac, est originaire de Suisse, dans le canton du Valais. Il s'établit à Bristol et se marie avec Florence Holten avec qui il aura trois enfants, Paul étant le cadet. Sa famille paternelle est issue de la ville de Dirac en Charente.

Il étudie les mathématiques à l'université de sa ville natale et entre à partir de 1923 à l'université de Cambridge. En 1925, il rencontre Niels Bohr, puis Werner Heisenberg. Il publie son premier article cette année là sur le formalisme de la physique classique et quantique. En 1926, il démontre l'équivalence physique de la mécanique ondulatoire d'Erwin Schrödinger et le modèle d'Heisenberg. Il soutient sa thèse cette même année et part travailler avec Bohr à Copenhague. Il rejoint Göttingen en 1927. En septembre, il est invité au cinquième congrès Solvay où il rencontre Albert Einstein.

En 1928, il déduit du travail de Pauli sur un système de spins non-relativiste une équation relativiste décrivant l'électron, et contenant en soi le spin. Elle est appelée aujourd'hui équation de Dirac. Cela permet à Dirac de prédire en 1931 l'existence d'une particule appelée positron, l'antiparticule de l'électron. Il faudra attendre 1932 pour qu'Anderson et Blackett observent enfin cette particule.

Dans son article "Les principes de la mécanique quantique", publié en 1930, il utilise l'algèbre des opérateurs linéaires comme une généralisation des théories d'Heisenberg et de Schrödinger. Il introduit ainsi la notation bra-ket, pour laquelle $|\psi\rangle$ est un vecteur d'état dans l'espace des états du système, et $\langle\psi|$ un vecteur de l'espace dual correspondant.

Il partage le prix Nobel de physique en 1933 avec Erwin Schrödinger pour « la découverte de formes nouvelles et productives de la théorie atomique ». Il se marie une année plus tard avec Margit Wigner avec qui il aura deux filles.

Dirac fut « Professeur Lucasien » à l'université de Cambridge de 1932 à 1969, et professeur de premier cycle à l'université de Bristol. Il est lauréat de la Royal Medal en 1939 et de la médaille Copley en 1952. En 1970, il rejoint l'université de Floride et s'installe à Tallahassee où il meurt 14 années plus tard.

Pour les besoins du formalisme quantique, Dirac a introduit un objet singulier, qu'on appelle aujourd'hui impulsion de Dirac ou masse de Dirac, notée $\delta(t)$. Cette impulsion représente un signal de durée théoriquement nulle et d'énergie finie, et doit vérifier la condition :

$$\int \delta(t)\ dt \ = \ 1.$$

Ce concept d'impulsion n'avait pas de fondement mathématique précis : en particulier, il ne pouvait pas s'agir d'une fonction ordinaire, car une fonction qui est nulle presque partout possède une intégrale identiquement nulle, d'après la théorie de l'intégration de Lebesgue. Le mathématicien Laurent Schwartz a inventé l'outillage adéquat pour décrire rigoureusement ce genre d'objets, la théorie des distributions.

Communément, on dit d'une mesure qu'elle est de Dirac si toute la densité est concentrée en un point unique.

Son laconisme et le puritanisme de son comportement marquèrent toute sa vie.

1.A Pour aller plus loin

Tribu produit

Définition 1.A.1 Soient $(\Omega,\mathcal{F})$ et $(\Omega',\mathcal{F}')$ deux espaces mesurables. On appelle *tribu produit* de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ et on note $\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}'$, la tribu sur $\Omega\times\Omega'$ engendrée par la famille des pavés mesurables $\{A\times A'; A\in\mathcal{F},\ A'\in\mathcal{F}'\}$. L'espace mesurable $(\Omega\times\Omega',\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')$ est appelé *espace mesurable produit* de $(\Omega,\mathcal{F})$ et $(\Omega',\mathcal{F}')$.

Exercice 1.3 Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ correspond avec la tribu produit $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_1$.

1.A.1 Deux outils importants

Deux notions vont nous intéresser particulièrement pour les mesures : la première va permettre de vérifier simplement si deux mesures sont les mêmes (elle pourra être utilisée notamment lorsque l'on veut montrer *l'unicité* d'une certaine mesure vérifiant telle ou telle propriété). La deuxième permettra d'étendre une "mesure" définie sur une certaine famille de parties (qui n'est pas une tribu) à une "vraie" mesure définie sur la tribu engendrée par cette famille de parties (elle pourra par exemple être utilisée pour montrer *l'existence* d'une mesure vérifiant telle ou telle propriété).

Egalité de deux mesures

Définition 1.A.2 On appelle *π-système* une famille d'ensembles $\mathcal{C}$ stable par intersection finie i.e.

$$\forall A,B\in\mathcal{C},\quad A\cap B\in\mathcal{C}$$

Une tribu est donc un π-système mais la réciproque n'est pas vraie. Nous admettrons le théorème suivant :

Théorème 1.A.3. *Soient μ et ν deux mesures définies sur $(\Omega,\mathcal{F})$ et soit $\mathcal{C}\subset\mathcal{F}$ un π-système. On suppose que pour tout $C\in\mathcal{C}$, $\mu(C)=\nu(C)$ et $\mu(\Omega)=\nu(\Omega)<\infty$. Alors $\mu(A)=\nu(A)$ pour tout $A\in\sigma(\mathcal{C})$.*

En d'autres termes, deux mesures qui coincident sur un π-système et sur Ω coincident donc sur la tribu engendrée par le π-système.

Pour bien visualiser l'intérêt de ce théorème, nous vous proposons de montrer que la mesure de Lebesgue est l'*unique mesure* λ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ telle que pour tout $a\le b$, $\lambda([a,b])=b-a$. Si en effet deux mesures λ_1 et λ_2 vérifiaient cette propriété, alors elles coïncideraient sur l'ensemble des segments $\{[a,b]; a\le b\}$ qui forme un π-système. De plus, les deux mesures rendent la même valeur sur tout segment $[k,k+1]$; du coup, en appliquant le théorème précédent, elles coincident sur les boréliens de $[k, k+1]$. En particulier, pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, $A \cap [k, k+1[$ est un borélien de $[k, k+1]$ et donc $\lambda_1(A \cap [k, k+1[) = \lambda_2(A \cap [k, k+1[)$. Et finalement

$$\lambda_1(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_1(A \cap [k; k+1[) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_2(A \cap [k; k+1[) = \lambda_2(A)$$

L'unicité est prouvée.

Extension d'une mesure

Définition 1.A.4 On appelle *algèbre* sur Ω une famille de parties de Ω vérifiant les trois propriétés suivantes :

i) $\emptyset \in \mathcal{E}_0$.

ii) $F \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow F^c \in \mathcal{E}_0$.

iii) $F,\ G \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{E}_0$.

Une algèbre a donc presque toutes les propriétés d'une tribu sauf que la stabilité est par intersection **finie**. Une tribu est donc une algèbre mais la réciproque n'est pas vraie. Pour résumer, $\{\pi\text{-systèmes}\} \supset \{\text{algèbres}\} \supset \{\text{tribus}\}$ sans que les inclusions en sens inverse soient vérifiées en général.

Définition 1.A.5 Une fonction d'ensemble ν définie sur $\mathcal{E}_0$ est dite σ-additive ssi pour toute réunion dénombrable d'éléments $F_i \in \mathcal{E}_0$, disjointes deux à deux ($F_i \cap F_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) et $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i \in \mathcal{E}_0$, on a

$$\nu(\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(F_i).$$

Une mesure est donc simplement une fonction d'ensemble *positive* σ-additive *sur une tribu*.

Nous admettrons le théorème d'extension (ou de prolongement) suivant :

Théorème 1.A.6. Théorème d'extension de Carathéodory- *Soit Ω un ensemble et $\mathcal{E}_0$ une algèbre sur Ω. Soit ν_0 une fonction d'ensemble σ-additive positive telle que $\nu_0(\Omega) < \infty$. Alors, il existe une unique mesure ν sur $\sigma(\mathcal{E}_0)$ telle que $\nu = \nu_0$ sur $\mathcal{E}_0$.*

En d'autres termes, une fonction d'ensemble positive vérifiant la σ-additivité sur une algèbre peut s'étendre en une mesure sur la tribu engendrée par l'algèbre.

De nouveau, ce théorème peut montrer *l'existence* de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Donnons seulement les étapes sans les détailler. On montre que l'ensemble $\mathcal{I}$ des réunions finies d'intervalles dont les bornes sont incluses ou non incluses forme une algèbre. On définit la fonction d'ensemble λ sur $\mathcal{I}$ par

$$\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b]) = b - a \quad \text{pour } 0 \leq a \leq b \leq 1$$

avec les conventions usuelles ($\infty - a = \infty$ ou $\infty + \infty = \infty$). On vérifie alors facilement la σ-additivité de cette fonction d'ensemble et on applique enfin le théorème. L'existence de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ est alors assurée.

1.A.2 Mesure produit

Nous terminons ce chapitre par les mesures produits. Disons le tout de suite, il existe beaucoup de mesures sur l'espace produit différentes des mesures produits ! Il s'agira ici seulement d'une mesure *particulière* sur l'espace produit. Nous avions vu comment construire la tribu produit $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}'$ en partant de deux espace mesurables : $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\Omega', \mathcal{F}')$. Si maintenant on munit chacun de ces deux espaces d'une mesure ν et ν' alors on peut construire une mesure sur l'espace produit par la proposition suivante :

Proposition 1.A.7. MESURE PRODUIT- *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ *et* $(\Omega', \mathcal{F}', \nu')$ *deux espaces mesurées. Il existe une unique mesure sur* $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}')$ *notée* $\nu \otimes \nu'$ *telle que pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *et* $B \in \mathcal{F}'$ *on a*

$$\nu \otimes \nu'(A \times B) = \nu(A)\nu'(B)$$

La mesure $\nu \otimes \nu'$ est aussi appelée *produit tensoriel* des mesures ν et ν'. La démonstration s'appuie de nouveau sur le théorème d'extension de Carathéodory mais nous ne pouvons pas l'appliquer directement car la classe des pavés $\{A \times B,\ A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{F}'\}$ ne forme pas une algèbre, (il suffit pour le voir de prendre le complémentaire d'un pavé et de se rendre compte qu'il ne peut s'écrire comme un pavé mais comme la réunion de deux pavés). Il faut donc être un peu plus précis. Dans le cadre de ce cours, cette proposition sera seulement admise.

Chapitre 2

Intégrale de Lebesgue

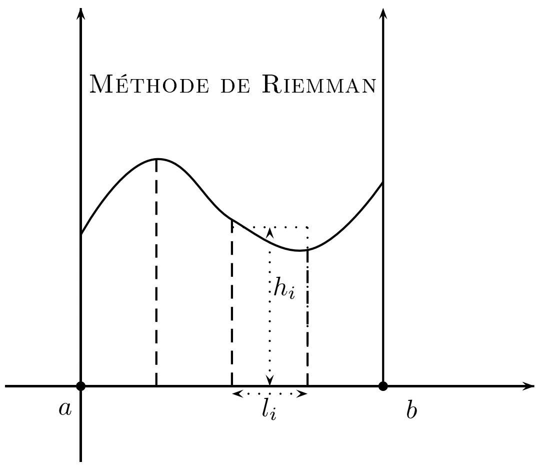
Sommaire

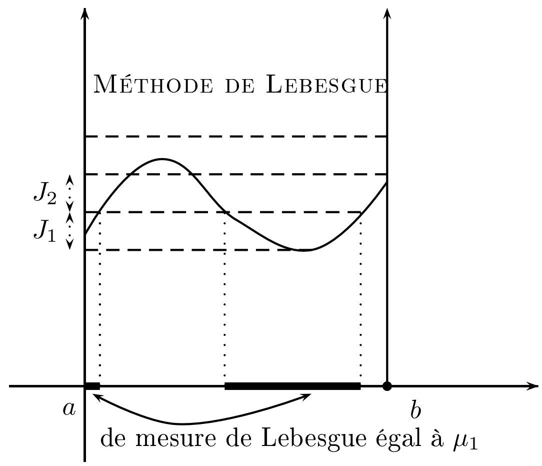
Mots clés 2.1 Fonctions mesurables, Intégrale de Lebesgue, théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée, lemme de Fatou.

2.1 Motivation

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la notion d'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. Nous allons maintenant nous intéresser à l'intégrale de Lebesgue qui lui est associée. Plus spécifiquement, nous définirons la notion d'intégrale au sens de Lebesgue d'une application f de Ω dans $\mathbb{R}$ par rapport à une certaine mesure ν donnée et nous en étudierons quelques propriétés utiles.

Pour comprendre un peu la démarche, considérons le problème de l'évaluation de l'aire S sous le graphe d'une application f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^+$ par calcul d'une intégrale de f sur $[a, b]$. Pour déterminer une valeur approchée de S (puis, sous certaines conditions de régularité, envisager par un passage à la limite approprié une définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$ donc de S) on peut procéder selon deux méthodes :





i) Méthode de Riemann- elle consiste à découper $[a, b]$ en sous intervalles, à approcher f par une constante sur chacun d'eux et à proposer comme approximation $S \simeq \sum_i l_i h_i$ où l_i est la longueur du i-ème sous intervalle I_i et h_i la valeur approchée de f sur I_i.

ii) Méthode de Lebesgue- elle consiste à découper l'ensemble des valeurs prises par f en sous-intervalles, à obtenir par "retour en arrière" (i.e. par application de la fonction réciproque f^{-1}) un découpage de $[a, b]$ puis à proposer comme approximation $S \simeq \sum_j \mu_j k_j$ où μ_j est la "longueur" (mesure de Lebesgue !) de l'image réciproque D_j du j-ème intervalle J_j et k_j une valeur appartenant à l'intervalle J_j.

Bien sur, tout cela n'est que pour se donner une idée et il ne faut comprendre cet exemple que comme un cas particulier (dans l'exemple ci-dessus, il s'agit de l'intégrale de Lebesgue associée à la mesure de Lebesgue, mais on peut aussi envisager l'intégrale de Lebesgue associée à d'autres mesures, nous verrons tout ça plus précisément dans la suite du chapitre). Il s'avère que la démarche de Lebesgue est plus féconde que celle de Riemann en ce sens que chaque fois que Riemann donne un sens au concept "intégrale de f sur $[a, b]$" et obtient une valeur S, alors Lebesgue donne aussi un sens à ce concept et obtient la même valeur alors que l'inverse n'est pas vraie (i.e. si $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$, $[a, b] = [0, 1]$, Lebesgue réussit et donne comme valeur 0 à l'intégrale de f sur $[a, b]$ alors que Riemann ne parvient pas à rendre de valeur).

Enfin, s'il ne fallait retenir que deux théorèmes phares de permutation dans ce chapitre, ce sont les théorèmes de $\boxed{\text{convergence monotone}}$ et de $\boxed{\text{convergence dominée}}$.

2.1.1 Fonctions mesurables

Soit f une application de Ω dans E. Pour tout $F \subset \mathsf{E}$ et pour toute famille de parties $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathsf{E})$, nous poserons

$$[f \in F] \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(F) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \in F\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} \{[f \in F], F \in \mathcal{E}\}$$

Nous allons maintenant décrire une classe de fonctions auxquelles s'adresse la notion d'intégrale de Lebesgue, ce sont les fonctions mesurables.

Définition 2.1.1 Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(\mathsf{E}, \mathcal{E})$ deux espaces mesurables et f une fonction de Ω dans E. La fonction f est *mesurable* relativement aux tribus $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ (on dit aussi $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-*mesurable*) ssi

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}, \quad \text{i.e.} \quad \forall A \in \mathcal{E}, \quad [f \in A] \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Nous avions vu qu'il est souvent difficile de décrire tout élément d'une tribu. Dans ces conditions, vérifier la condition (2.1) pour tout ensemble A de la tribu $\mathcal{E}$ est difficile. La proposition suivante permet alors de ne vérifier (2.1) que sur une famille de parties engendrant la tribu $\mathcal{E}$ associée à l'espace d'arrivée. Ce qui a des conséquences pratiques intéressantes pour montrer qu'une fonction est mesurable.

Proposition 2.1.2. *Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathsf{E})$ telle que $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C})$. Une application f de Ω dans E est $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$.*

Une manière plus visuelle de se représenter la proposition est la suivante

$$\left.\begin{array}{r} f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathsf{E}, \mathcal{E}) \\ \mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C}) \\ f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F} \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$$

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire puisque $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{E})$. Inversement, si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}$, on a aussi $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{F}$ et comme $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ (le vérifier) et par hypothèse $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C})$, il s'en suit que $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. ■

Remarque 2.1.1 Comme $\mathcal{E}$ est une tribu, $f^{-1}(\mathcal{E})$ l'est aussi (le démontrer). $f^{-1}(\mathcal{E})$ est donc la plus petite tribu $\mathcal{A}$ telle que f soit $\mathcal{A}/\mathcal{E}$-mesurable. $f^{-1}(\mathcal{E})$ sera appelée dans toute la suite *tribu engendrée par f* et notée $\sigma(f)$. Pour mémo, nous avons donc maintenant vu les tribus engendrées par des familles de parties (chapitre précédent) et les tribus engendrées par des fonctions (ici !).

Dans le cas où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ sont des tribus boréliennes, on dira que la fonction f est *borélienne*.

Pour voir l'utilité de la Proposition 2.1.2, nous allons présenter maintenant deux exemples classiques de fonctions mesurables :

Exemple 2.1.1 Les fonctions continues de $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$ vers $(\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}_\ell)$ sont boréliennes. En effet, $\mathcal{B}_\ell$ est engendrée par les ouverts donc si f est continue de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^\ell$, alors l'image réciproque par f de tout ouvert de $\mathbb{R}^\ell$ est un ouvert donc un élément de $\mathcal{B}_k$, ce qui montre bien la mesurabilité de la fonction.

Exemple 2.1.2 Les fonctions indicatrices d'ensemble, $x \mapsto f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ avec A élément de $\mathcal{F}$ sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ vers $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$. Comme $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0,1\}, \{0\}, \{1\}\}$ est engendré par le singleton $\{1\}$, il suffit de considérer $f^{-1}(\{1\}) = \{\omega, \mathbf{1}_A(\omega) = 1\} = A$ qui est dans $\mathcal{F}$ et en appliquant la Proposition 2.1.2, on a donc que la fonction $x \mapsto f(x) = \mathbf{1}_A(x)$ est mesurable.

Les propriétés suivantes sont immédiates et seront laissées au lecteur à titre d'exercice. Elles montrent que la notion de mesurabilité se conserve à travers un certain nombre d'opérations usuelles et de passage à la limite.

Propriétés :

i) Si f et g sont deux applications réelles mesurables définies sur le même espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ alors

$f+g$	λf, λ réel	fg	$\sup(f,g)$
$\inf(f,g)$	$f^+ \overset{\text{def}}{=} \sup(f,0)$	$f^- \overset{\text{def}}{=} -\inf(f,0)$	$\lvert f \rvert = f^+ + f^-$

sont des fonctions mesurables.

ii) Si $\{f_n, n \geq 1\}$ est une suite d'applications réelles mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ alors

$\sup_n f_n$	$\inf_n f_n$	$\overline{\lim}_n f_n$	$\underline{\lim}_n f_n$

sont mesurables. En particulier, si $\{f_n, n \geq 1\}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.

Conséquences pratiques- Faisons le point sur les différents résultats obtenus et voyons comment montrer d'un point de vue pratique qu'une fonction est mesurable. Plusieurs choix s'offrent à nous :

i) Soit c'est une fonction continue et les tribus de l'espace de départ et d'arrivée sont les tribus boréliennes.

ii) Soit c'est une fonction indicatrice d'un ensemble appartenant à la tribu de l'espace de départ.

iii) Soit c'est une somme, multiplication (ou autres opérations vu ci dessus) de fonctions dont on sait qu'elles sont mesurables (par exemple combinaisons linéaires et produits de fonctions continues ou fonctions indicatrices d'ensemble)

iv) Soit on revient à la Proposition 2.1.2 ou même à la Définition des fonctions mesurables (c'est le dernier recours...)

2.2 Intégrale de fonctions mesurables positives

Les fonctions mesurables étant construites, passons maintenant aux choses sérieuses : la construction de l'intégrale associée à une mesure donnée.

On se donne donc $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré et on notera $\mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$, l'ensemble des applications mesurables positives réelles. L'objet de cette section consistera à décrire l'intégrale de Lebesgue associée à ν pour des fonctions mesurables positives, le cas général des fonctions f mesurable non bornées sera quant à lui traité dans la section suivante.

L'approche sera progressive. La première étape de la construction de l'intégrale consistera à la définir pour des fonctions "simples" : les fonctions étagées. On dit qu'une application mesurable f sur cet espace est *étagée positive* ssi f est une application réelle positive (i.e. à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$) qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, i.e. $f(\Omega)$ est fini. Soit f une fonction étagée, alors $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ et f peut donc s'écrire aussi

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]}$$

Cela ressemble donc à une fonction en escalier sauf qu'ici f est constante sur des ensembles de la forme $[f = \alpha_i] = \{\omega \in \Omega; f(\omega) = \alpha_i\}$, ensembles qui ne ressemblent pas nécessairement à des intervalles (comme c'est le cas pour des fonctions en escalier). Par exemple, $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est une fonction étagée mais pas en escalier.

Définition 2.2.1 Soit $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]}$ une application étagée positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. On appelle *intégrale de f* sur Ω par rapport à ν la quantité (éventuellement égale à ∞)

$$\int f d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu([f = \alpha_i])$$

Si $A \in \mathcal{F}$ alors, en appliquant cette définition, on a $\boxed{\int \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A)}$ de façon claire.

L'extension de cette définition de l'intégrale à des fonctions mesurables positives (et pas seulement des fonctions étagées) est donnée par le résultat suivant.

Théorème et Définition 2.2.2 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré. Toute fonction mesurable positive $f : \Omega \to [0, \infty]$ possède une intégrale, appelée *intégrale de Lebesgue de* f et notée

$$\int_\Omega f(\omega)\nu(d\omega) \quad \text{ou} \quad \int f d\nu$$

définie par

$$\int f d\nu = \sup \left\{ \int g d\nu, g \text{ mesurable, étagée et } g \leq f \right\}$$

qui est un nombre réel positif (pouvant éventuellement valoir $+\infty$) satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \bar{\mathbb{R}}^+)$,

i) $\int \mathbf{1}_A d\nu = \nu(A)$.

ii) $\int (\alpha f + \beta g) d\nu = \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu$ (▶LINÉARITÉ).

iii) De plus, pour toute suite croissante f_n de fonctions étagées mesurables convergeant vers f, on a

$$\int f d\nu = \lim \int f_n d\nu$$

On verra apparaître souvent des limites croissantes dans ce chapitre. Ce n'est pas étonnant, la propriété essentielle des mesures est la σ-additivité, qui donne

$$\nu(\cup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$$

dès que la condition $A_i \cap A_j = \emptyset$ est vérifiée pour tout $i \neq j$. Cette propriété est une propriété de *limite croissante* puisque

$$\sum_n \nu(A_n) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \lim_N \nu(\cup_{n=1}^N A_n)$$

et la suite $(\cup_{n=1}^N A_n)_N$ est une suite *emboîtée d'ensembles*! Les propriétés de l'intégrale qui seront constamment utilisées par la suite sont résumées dans la proposition suivante et nous invitons donc le lecteur à y porter une attention toute particulière :

Proposition 2.2.3. *Soient* $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$ *et* $\{f_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$. *Alors*

i) $(f \leq g) \Rightarrow \left(\int f d\nu \leq \int g d\nu\right)$. (►MONOTONIE).

ii) $\boxed{((f_n) \textit{ suite } \text{croissante } \textit{de fonctions positives}) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} \int f_n d\nu = \int (\lim_{n\to\infty} f_n) d\nu)}$. (►CONVERGENCE MONOTONE).

iii) $\int \sum_k f_k d\nu = \sum_k \int f_k d\nu$. (►ADDITIVITÉ POUR DES SÉRIES POSITIVES).

iv) $\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int (\underline{\lim}_n f_n) d\nu$. (►LEMME DE FATOU).

Remarque 2.2.1 Nous attirons l'attention sur le fait que dans la proposition 2.2.3 i), que $f \leq g$ est une inégalité entre deux fonctions, ce qui en d'autres termes signifie : pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \leq g(\omega)$. Nous soulignons aussi que l'hypothèse du ii) concerne des suites croissantes de fonctions (i.e. $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$) et non pas des suites de fonctions croissantes.

Les preuves du Théorème et Définition 2.2.2 et de la Proposition 2.2.3 résultent de la construction de l'intégrale de Lebesgue qui est reportée à la section CONSTRUCTION DE L'INTÉGRALE DE LEBESGUE dans l'Appendice 2.A. Ces preuves ne sont donc pas à connaître et peuvent donc être écartées dans une première lecture. Néanmoins, elles permettent dans une seconde lecture de bien comprendre d'où viennent les propriétés spécifiques de l'intégrale de Lebesgue et nous encourageons le lecteur curieux à les consulter. Nous nous contenterons pour le moment de prouver les parties iii) et iv) de la proposition 2.2.3.

DÉMONSTRATION. **(de la Proposition 2.2.3 iii et iv)**. iii) Posons $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Les fonctions (f_k) étant toutes positives, les fonctions (g_n) forment une suite croissante de fonctions, et par la convergence monotone, ii) pour les fonctions (g_n), il vient :

$$\int \sum_k f_k d\nu = \int \lim_{n\to\infty} g_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int f_k d\nu = \sum_k \int f_k d\nu.$$

Pour iv), posons $g_n = \inf_{j \geq n} f_j$ et $h_n = \inf_{j\geq n} \int f_j d\nu$. Alors $\int g_n d\nu \leq \int f_j d\nu$ pour tout $j \geq n$ donc $\int g_n d\nu \leq h_n$. Remarquons que $\{g_n, n \geq 0\}$ est une suite croissante, et par (ii) (théorème de convergence monotone) pour $\{g_n, n \geq 0\}$, il vient alors

$$\int (\underline{\lim}_n f_n) d\nu = \int (\lim_n g_n) d\nu = \lim_n \int g_n d\nu \leq \lim_n h_n = \underline{\lim}_n \int f_n d\nu$$

■

Exemple 2.2.1 INTÉGRATION PAR RAPPORT À UNE MESURE DISCRÈTE- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré où $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{\omega_n}$ est la mesure discrète définie par les masses $a_n \geq 0$ aux points ω_n, $n \geq 1$. Alors pour tout $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$,

$$\int f d\nu = \sum_{n\geq 1} f(\omega_n) a_n$$

Lien entre les propriétés sur les intégrales de fonctions (Proposition 2.2.3) et les propriétés sur les mesures (Proposition 1.2.3)

Il faut bien comprendre la Proposition 2.2.3 comme une conséquence de propriétés déjà constatées dans le chapitre précédent pour les mesures. Notamment, les propriétés de monotonie et continuité de la Proposition 1.2.3 du Chapitre 1 entraînent sur l'intégrale de Lebesgue les propriétés de monotonie et de convergence monotone de la Proposition 2.2.3. Réciproquement, si on voulait prouver la monotonie et la continuité de la Proposition 1.2.3 à partir de nos connaissances sur l'intégrale de Lebesgue, alors c'est possible, comme le montre l'exercice corrigé suivant. Un intérêt annexe à cet exercice est de traduire aisément les relations $\cup$, $\subset$ en terme d'inégalité ou limite de fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_A$.

Exercice Corrigé 2.1 En utilisant la Proposition 2.2.3, montrer la Proposition 1.2.3 i) et iii).

Démonstration.

a) Si $A \subset B$ alors $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ [1]donc par la propriété de monotonie de l'intégrale de Lebesgue, $\int \mathbf{1}_A d\nu \leq \int \mathbf{1}_B d\nu$ ce qui est équivalent à écrire $\nu(A) \leq \nu(B)$.

b) On a immédiatement

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k, &\qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k}(\omega) = 1, \\ \forall \omega \in (\cup_{k=1}^{\infty} A_k)^c, &\qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k}(\omega) = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{\infty} A_k} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k}$. Comme les fonctions $(\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k})$ sont croissantes, on a par la propriété de convergence monotone,

$$\nu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \int \mathbf{1}_{\cup_n A_n} d\nu = \int \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k} d\nu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k} d\nu$$

Ainsi, si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ alors, $\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^{n} A_k}$ et l'égalité précédente s'écrit

$$\nu(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{n\to\infty} \int \mathbf{1}_{A_n} d\nu = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

■

Chaque fois qu'une fonction est intégrable au sens de Riemann, elle va l'être aussi au sens de Lebesgue. Ce résultat "rassurant" sera présenté ici sous forme d'exercice avec indication.

Exercice 2.2 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ bornée et intégrable au sens de Riemann sur [a,b]. Montrer que l'intégrale de f sur $[a,b]$ au sens de Riemann et au sens de Lebesgue coincident.
Indication : On remarquera que l'intégrale de Riemann sur $[a,b]$ s'écrit

$$\int_a^b f d\nu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} \frac{b-a}{2^n} \quad \text{avec} \quad a_{k,n} = \inf_{x\in I_{k,n}} f(x) \quad \text{et} \quad I_{k,n} = \left[a + k\frac{b-a}{2^n}, a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}\right[,$$

Et on montrera que cette limite est aussi celle de l'intégrale des fonctions

$$f_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_{k,n} \mathbf{1}_{I_{k,n}}$$

et on montrera que (f_n) est une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f.

2.3 Fonctions intégrables et propriétés

2.3.1 Définition

Venons-en à la définition de l'intégrale pour des éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}})$, ensemble des applications réelles mesurables, *de signe quelconque* cette fois-ci.

1. inégalité très simple mais souvent utilisée

Définition 2.3.1 Une application $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}})$ est dite *intégrable* par rapport à ν (ou ν-intégrable ou ν-sommable) ssi

$$\left(\int f^+ d\nu < \infty \quad \text{et} \int f^- d\nu < \infty\right) \quad \text{ou, de façon équivalente, } \int |f| d\nu < \infty$$

Le nombre réel

$$\int f d\nu \stackrel{\text{def}}{=} \int f^+ d\nu - \int f^- d\nu$$

est appelé *intégrale de* f (sur Ω) par rapport à ν. Pour $A \in \mathcal{F}$, le nombre $\int_A f d\nu \stackrel{\text{def}}{=} \int f \mathbf{1}_A d\nu$ est appelé *intégrale de* f sur A.

Une fonction f est ici intégrable si $\int |f| d\nu < \infty$. Dans d'autres chapitres, nous aurons aussi à considérer des intégrales *impropres*, i.e. obtenues comme limites d'intégrales de type

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} f(x) \lambda(dx)$$

La valeur de cette limite quand elle existe est appelée *valeur principale* de f mais nous y reviendrons plus tard (au moment du Chapitre **??**). On note aussi que si ν est la mesure de Lebesgue λ, la notation sous l'intégrale $\lambda(dx)$ est souvent remplacée par simplement dx. Et par abus de notation (ou par lassitude), lorsqu'on dit qu'une fonction est intégrable sans préciser par rapport à quelle mesure, on veut simplement dire qu'elle est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.

Enfin, on dira que f est *localement ν-intégrable* ou *localement ν-sommable* ssi $\int_K |f(x)| \nu(dx) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

2.3.2 Propriétés

On a immédiatement les propriétés suivantes dont la démonstration est laissée en exercice.

Proposition 2.3.2. *i)* $\int \alpha f + \beta g d\nu = \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu$ *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* f, g *intégrables.*

ii) Si f est mesurable, g ν-intégrable et $|f| \leq g$ alors f est ν-intégrable et $\int |f| d\nu \leq \int g d\nu$.

iii) Si f est ν-intégrable alors $|\int f d\nu| \leq \int |f| d\nu$.

iv) Si f est ν-intégrable, alors $\nu([|f| = \infty]) = 0$

L'un des résultats principaux de la théorie de l'intégration au sens de Lebesgue est le suivant :

Théorème 2.3.3. LEBESGUE- *Soient (f_n) et f et g sont des fonctions réelles mesurables. Soit I un intervalle fini ou infini. Supposons que*

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \quad |f_n| \leq g, \ \nu - p.p. \text{ sur } I \text{ avec } \int_I |g| d\nu < \infty \\ \lim_n f_n = f, \nu - p.p. \end{cases}$$

alors $\boxed{\lim_n \int_I f_n d\nu = \int_I \lim_n f_n d\nu = \int_I f d\nu \quad (\blacktriangleright \text{LEBESGUE OU CONVERGENCE DOMINÉE})}$

DÉMONSTRATION. On ne démontrera que pour $I = \mathbb{R}$ dans ce cas, on écrira simplement $\int$ au lieu de $\int_{\mathbb{R}}$. Rappelons que $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ sont définies dans le Chapitre **Notations et Rappels**. Montrons d'abord

i) $\overline{\lim}_n \int f_n d\nu \leq \int \overline{\lim}_n f_n d\nu$

ii) $\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int (\underline{\lim}_n f_n) d\nu$

En effet, en appliquant Fatou (Proposition 2.2.3 iv) à la suite de fonctions *positives* $(g - f_n)$, il vient :

$$\underline{\lim}_n \int (g - f_n) d\nu \geq \int \underline{\lim}_n (g - f_n) d\nu$$

soit

$$\int g d\nu - \overline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int g d\nu - \int \overline{\lim}_n f_n d\nu$$

ce qui achève la preuve de i). (ii) est immédiat en appliquant le résultat i) à $(-f_n)$. Passons maintenant à la preuve du théorème de convergence dominée. On a $f = \underline{\lim}_n f_n = \overline{\lim} f_n$, ce qui implique d'après i) et ii)

$$\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \geq \int f d\nu \geq \overline{\lim}_n \int f_n d\nu$$

Et comme on a toujours $\underline{\lim}_n \int f_n d\nu \leq \overline{\lim}_n \int f_n d\nu$, la preuve est achevée. ∎

2.4 Interversion du signe intégral

2.4.1 Interversion série/intégrale

Nous avons vu à travers le théorème de *convergence monotone* et dans le *théorème de Lebesgue* (aussi appelé *théorème de convergence dominé*) qu'il était possible, sous certaines conditions, de permuter intégrale et limite : $\lim_n \int f_n d\nu = \int \lim_n f_n d\nu$.

Pour les séries de fonctions $\sum f_n$, nous avons vu par l'additivité des séries positives qu'on avait nécessairement la permutation entre intégrale et somme : $\sum_n \int f_n d\nu = \int \sum_n f_n d\nu$ à partir du moment où chaque fonction f_n est une fonction positive. Qu'en est il maintenant si aucune hypothèse sur le signe de f_n n'est faite ? Des résultats de permutation existent et sont essentiellement issus de la convergence dominée pour la *suite* des sommes partielles $S_N = \sum_0^N f_n$. Enonçons donc le résultat avant de le démontrer.

Proposition 2.4.1. PERMUTATION SÉRIE/INTÉGRALE- *Si pour presque tout x, $\sum f_n(x)$ converge et si l'une* **ou** *l'autre des deux conditions suivantes est réalisée :*

i) $|\sum_{n=0}^N f_n(x)| < g(x)$ p.p. *avec* $\int g d\nu < \infty$

ii) $\sum_n \int |f_n| d\nu = \int \sum_n |f_n| d\nu < \infty$

Alors, $\sum_n \int f_n d\nu = \int \sum_n f_n d\nu$.

Remarque 2.4.1 Comme indiqué en préambule de ce théorème, si la série est à termes positifs, on a nécessairement (voir Proposition 2.2.3 (iii)) $\sum_n \int f_n d\nu = \int \sum_n f_n d\nu$ **sans avoir à utiliser ce théorème**.

Remarque 2.4.2 Dans la condition ii), l'égalité $\sum_n \int |f_n| d\nu = \int \sum_n |f_n| d\nu$ est assurée puisque la série $\sum_n |f_n|$ est une série de fonctions positives. Ainsi, pour vérifier la condition ii), on cherchera seulement à vérifier l'une des deux conditions équivalente $\sum_n \int |f_n| d\nu < \infty$ ou $\int \sum_n |f_n| d\nu < \infty$.

DÉMONSTRATION. On remarquera que la seconde condition est un cas particulier de la première (en clair : (ii) implique (i)) puisqu'en notant $g(x)$ la somme de la série des valeurs absolues $g(x) = \sum_0^\infty |f_n(x)|$ alors $|\sum_{n=1}^N f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^N |f_n(x)| \leq g(x)$ et $\int g d\nu < \infty$ par l'hypothèse ii). Il nous suffit donc seulement de prouver la proposition 2.4.1 sous la condition i). Plaçons nous donc sous la condition i), et posons S_N la somme partielle, $S_N = \sum_0^N f_n$. On a $S_N(x) \leq g(x)$ p.p. et $\int g d\nu < \infty$, on applique alors le théorème de convergence dominé : $\lim_N \int S_N(x) \nu(dx) = \int \lim_N S_N(x) \nu(dx)$ ce qui est exactement équivalent à

$$\sum_n \int f_n d\nu = \int \sum_n f_n d\nu$$

La preuve est achevée. ∎

2.4.2 Continuité et dérivation sous le signe intégrale

Continuité sous le signe intégrale

Nous sommes maintenant en mesure de donner des conditions assurant la continuité et la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre, i.e. de la fonction $x \mapsto \int f(x, \omega) d\nu(\omega)$. Nous admettrons les deux théorèmes suivants. Leurs démonstrations ne sont pas difficiles et résultent toutes deux du théorème de convergence dominée en posant pour $f_n(\omega) = f(u_n, \omega)$ (pour le Théorème 2.4.3) et $f_n(\omega) = \frac{f(u_n,\omega) - f(x_0,\omega)}{u_n - x_0}$ (pour le Théorème 2.4.4) où (u_n) est une suite quelconque de points de Ω convergeant vers x_0. Nous les laissons au lecteur intéressé et nous concentrons uniquement sur l'énoncé et l'application de ces théorèmes.

Théorème 2.4.2. *Soit $x_0 \in [a,b]$. On suppose que pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,\omega)$ est continue en x_0.*

S'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ν-intégrable telle que, pour tout x dans un voisinage de x_0, on ait

$$|f(x,\omega)| \leq g(\omega) \quad \textit{pour presque tout } \omega \in \mathbb{R}$$

alors $\lim_{x\to x_0} \int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\nu(d\omega) = \int \lim_{x\to x_0} f(x,\omega)\nu(d\omega)$. En d'autres termes, la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\nu(d\omega)$$

est continue en x_0.

Que se passe-t-il maintenant si $x_0 = \infty$? Le théorème suivant donne la réponse à la question. On remarquera qu'il peut se généraliser sans problème à $x_0 = -\infty$.

Théorème 2.4.3. *Soit $f : [a,\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x,\omega)$ existe.*

S'il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ν-intégrable telle que, pour tout $x \in [a,\infty[$ on ait

$$|f(x,\omega)| \leq g(\omega) \quad \textit{pour presque tout } \omega \in \mathbb{R}$$

alors $\lim_{x\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\nu(d\omega) = \int \lim_{x\to\infty} f(x,\omega)\nu(d\omega)$.

Dérivation sous le signe intégrale

Théorème 2.4.4. *Soit $x_0 \in [a,b]$. On suppose que, dans un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, la fonction $x \mapsto f(x,\omega)$ est dérivable pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$ et que, de plus, la fonction dérivée est dominée, c'est à dire qu'il existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ν-intégrable telle que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\omega)\right| \leq g(\omega) \quad \textit{pour tout } x \in \mathcal{V} \textit{ et presque tout } \omega \in \mathbb{R}.$$

Alors la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\nu(d\omega)$ est dérivable en x_0 et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,\omega)\nu(d\omega)\right)\Bigg|_{x=x_0} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,\omega)\nu(d\omega)$$

2.5 Points essentiels du chapitre

a) Les notions importantes sont les fonctions mesurables et l'intégrale au sens de Lebesgue.
b) L'intégrale d'une fonction positive f est obtenue comme limite des intégrales d'une suite croissante de fonctions étagées convergeant simplement vers f.
c) Les trois théorèmes importants sont le théorème de convergence monotone, le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominé.
d) Ce chapitre a aussi permis de permuter limite et intégration, série et intégration, continuité et intégration, dérivation et intégration.
e) On notera qu'ici à partir d'une mesure quelconque ν (pas nécessairement la mesure de Lebesgue), on construit l'intégrale $\int f d\nu$ qui est appelée intégrale de Lebesgue. On veillera donc à ne pas confondre, *mesure de Lebesgue* et *intégrale de Lebesgue*.

2.6 Un peu d'histoire

Henri Lebesgue (1875-1941). Source : bibmath.

Henri Léon Lebesgue est né le 28 juin 1875 à Beauvais. Son père, d'origine humble, était ouvrier typographe. Mais il décède, ainsi que les deux soeurs ainées d'Henri, de la tubercolose, peu de temps après la naissance de son fils. Ce dernier aura lui-même des séquelles de cette maladie toute sa vie, et sa santé demeurera toujours fragile.

La mère de Lebesgue fut une travailleuse infatigable. Elle ne rechignera jamais à ce que son fils poursuive ses études et Henri restera effectivement longtemps à sa charge. Ainsi Lebesgue, brillant dès l'école primaire, fut porté de bourse en bourse, au lycée puis en classe préparatoire au Lycée Louis-Le-Grand, et enfin à l'Ecole Normale Supérieure. Il épousera la soeur d'un camarade de collège. Ensemble, ils auront deux enfants, Suzanne et Jacques.

Après sa réussite à L'Agrégation en 1897, il enseigne quelques années en classes préparatoires à Nancy, et simultanément prépare sa thèse. Il la soutient en 1902, sous le titre Intégrale, longueur, aire. Dans cette thèse, Lebesgue présente la théorie d'une nouvelle intégrale, appelée depuis intégrale de Lebesgue, qui va considérément simplifier et amplifier l'étude des séries trigonométriques, et plus généralement toute l'analyse de Fourier.

L'intégrale de Riemann avait montré ses limites, d'abord sur le champ des fonctions intégrables (assez restreint), et surtout sur les permutations de limites et d'intégrales. Lebesgue s'appuie sur les travaux de Jordan, Borel et Baire pour présenter une théorie des fonctions mesurables, qui peuvent être très discontinues. Dans la foulée, il définit une nouvelle méthode de sommation. Dans la théorie de Lebesgue, les théorèmes de permutation limite et intégrale ont un énoncé très simple, et sont très puissants ! En outre, par sa nature même, l'intégrale de Lebesgue est aussi bien adaptée aux fonctions d'une seule variable que de plusieurs. Le revers de la médaille est que sa présentation réclame de longs préliminaires théoriques. C'est toujours un problème, dans l'enseignement actuel, d'essayer d'introduire le plus tôt possible l'intégrale de Lebesgue, de façon à mettre ce formidable outil à la disposition des physiciens.

Si Lebesgue n'a pas été le chef d'une école de chercheurs, ses qualités pédagogiques étaient reconnues. Dans ses cours à la Sorbonne, au Collège de France ou à l'Ecole Normale Supérieure de jeunes filles, il faisait preuve d'originalité dans l'exposition. Etonnament peut-être, Lebesgue n'enseigna jamais sa propre théorie. C'est qu'il craignait la généralisation à outrance ("Réduites à des théories générales, les mathématiques seraient une belle forme sans contenu" dit-il). Les succès qu'ont retiré les analystes de l'intégrale de Lebesgue ont depuis démenti ces faits.

2.A Construction de l'intégrale de Lebesgue

La démarche générale consistera à définir l'intégrale pour une classe de fonctions mesurables positives particulières, très simples, les fonctions étagées puis, en montrant que ces fonctions étagées peuvent approcher toute fonction mesurable positive, nous étendrons par passage à la limite la notion d'intégrale de Lebesgue aux fonctions mesurables positives. Commençons par un peu de terminologie.

Terminologie : Rappelons que $\mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$ désigne l'ensemble des applications mesurables positives réelles et qu'une application mesurable f sur cet espace est *étagée positive* ssi f est une application réelle positive (i.e. à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$) qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles, i.e. $f(\Omega)$ est fini. L'ensemble des applications étagées sera noté $\mathcal{E}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$.

2.A.1 Intégrale pour des fonctions étagées

La première étape de la construction de l'intégrale consistera à la définir pour les fonctions étagées. Soit f une fonction mesurable étagée, alors $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ et f peut donc s'écrire aussi

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]}$$

Définition 2.A.1 Soit $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]}$ une application étagée positive sur $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$. On appelle *intégrale de f* sur Ω par rapport à ν la quantité (éventuellement égale à ∞)

$$\int f d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu([f=\alpha_i])$$

Avec cette définition de l'intégrale de f, on peut aussi montrer que si f peut s'écrire $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ alors,

$$\int f d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(A_i).$$

Lemme 2.A.2. *Soit $f, g \in \mathcal{E}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$ et $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}^+$. Alors*

i) $\int (\alpha f + \beta g) d\nu = \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu$. (▶ LINÉARITÉ)

ii) $(f \leq g) \Rightarrow \left(\int f d\nu \leq \int g d\nu\right)$ (▶MONOTONICITÉ).

DÉMONSTRATION.

i) Il suffit de montrer que $\int \alpha f d\nu = \alpha \int f d\nu$ puis que $\int (f+g) d\nu = \int f d\nu + \int g d\nu$. La première égalité est évidente par la définition de l'intégrale. Maintenant soient $f(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ et $g(\Omega) = \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$. L'ensemble Ω peut être partitionné de deux façons

$$\Omega = \cup_i [f = \alpha_i] = \cup_j [g = \beta_j].$$

ce qui permet de partionner $[f = \alpha_i]$ et $[g = \beta_j]$ en

$$\begin{cases} [f = \alpha_i] = \cup_j ([f = \alpha_i] \cap [g = \beta_j]) \\ [g = \beta_j] = \cup_i ([g = \beta_j] \cap [f = \alpha_i]) \end{cases}$$

Nous avons maintenant des écritures de f et g qui les rendent constantes sur les mêmes ensembles :

$$f = \sum_{i,j} \alpha_i \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]\cap[g=\beta_j]} \quad \text{et} \quad g = \sum_{i,j} \beta_j \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]\cap[g=\beta_j]}$$

ce qui permet d'écrire aisément $f + g = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mathbf{1}_{[f=\alpha_i]\cap[g=\beta_j]}$ et l'égalité souhaitée $\int (f+g) d\nu = \int f d\nu + \int g d\nu$ devient alors immédiate par la définition même de l'intégrale pour des fonctions étagées.

ii) Les représentations de f et g dans la preuve de i) montrent immédiatement cette propriété.

■

Définition 2.A.3 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ un espace mesuré et f une application mesurable positive de $\mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$. Alors, l'intégrale de Lebesgue associée à f par rapport à la mesure ν est définie par la quantité

$$\int f d\nu \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int g d\nu, g \text{ mesurable, étagée et } g \leq f \right\}$$

qui prend donc une valeur positive ou infinie.

Par passage au sup, on a immédiatement la propriété de monotonie, en utilisant la monotonie sur les fonctions étagées :

$$\forall f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+), \quad (f \leq g) \Rightarrow \int f d\nu \leq \int g d\nu$$

La linéarité par contre ne s'étend pas de façon immédiate et nous aurons d'abord à prouver une propriété de convergence monotone qui va être particulièrement utile pour la suite.

Proposition 2.A.4. CONVERGENCE MONOTONE-. *Soit* $\{f_n, n \geq 0\}$ *une suite* **croissante** *d'applications de* $\mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$*, alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\nu = \int \lim_{n\to\infty} f_n d\nu$$

DÉMONSTRATION. La fonction $f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n f_n$ est mesurable, positive et majore les fonctions f_n et donc $\int f d\nu \geq \int f_n d\nu$ pour tout n. Si β dénote la limite croissante $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n \int f_n d\nu$, il vient alors $\int f d\nu \geq \beta$. Au vu de la définition de l'intégrale de Lebesgue, il nous reste à prouver que pour toute fonction g mesurable, étagée telle que $g \leq f$ alors $\int g d\nu \leq \beta$ et ceci en effet impliquerait par passage au sup que $\int f d\nu \leq \beta$ ce qui achèverait la preuve.

Soit donc g mesurable étagée telle que $g \leq f$ et notons $g(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$. Pour tout $0 < c < 1$, considérons

$$A_n = \{\omega; f_n(\omega) \geq cg(\omega)\}$$

et remarquons que

$$\mathbf{1}_{A_n}(\omega)g(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{1}_{A_n \cap [g=\alpha_i]} \quad \text{d'où} \quad \int \mathbf{1}_{A_n} g d\nu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(A_n \cap [g = \alpha_i])$$

De plus, la suite (A_n) est croissante pour l'inclusion $(A_1 \subset A_2 \subset \ldots)$ et $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ et nous pouvons écrire alors en utilisant $f_n \geq \mathbf{1}_{A_n} f_n \geq c\mathbf{1}_{A_n} g$,

$$\beta \geq \int \mathbf{1}_{A_n} f_n d\nu \geq c \int \mathbf{1}_{A_n} g d\nu = c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu(A_n \cap [g = \alpha_i]) \to_{n\to\infty} c \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nu([g = \alpha_i]) = c \int g d\nu \tag{2.2}$$

où le passage à la limite vient de la propriété de continuité (Proposition 1.2.3) avec les ensembles emboîtés $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ avec $B_n \stackrel{\text{def}}{=} A_n \cap [g = \alpha_i]$ et en remarquant que $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = [g = \alpha_i]$.

On a donc $\beta \geq c \int g d\nu$ et en faisant tendre c vers 1, on obtient l'inégalité souhaitée. ■

Un corollaire immédiat de la convergence monotone est le suivant :

Corollaire 2.A.5. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$ *et* $\{f_n, n \geq 1\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$ *une suite* **croissante** *de fonctions mesurables étagées telle que* $\lim_n f_n = f$. L' intégrale de f *sur* Ω *par rapport à la mesure* ν *est la quantité (éventuellement* ∞*)*

$$\int f d\nu = \lim_n \int f_n d\nu,$$

cette limite ne dépendant pas de la suite croissante de fonctions mesurables étagées, minorant f*.*

On peut montrer que $(\varphi_n[f])$ défini par

$$\varphi_n[f] = \sum_{0 \leq k/2^n \leq n} \left(\frac{k}{2^n}\right) \mathbf{1}_{[k/2^n < f \leq (k+1)/2^n]} + n\mathbf{1}_{[f>n]}$$

est une suite croissante de fonctions mesurables étagées convergeant vers f. On a déja vu que la propriété de monotonie est immédiate au vu de la définition. La linéarité $\int(\alpha f + \beta g)d\nu = \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu$ est maintenant immédiate à partir du Corollaire 2.A.5 et de la propriété de linéarité pour les fonctions étagées. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 2.A.6. *Soient* $f, g \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$*, soient* $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}^+$*. Soient* $\{f_n, n \geq 0\} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}, \bar{\mathbb{R}}^+)$*. Alors*

i) $\int(\alpha f + \beta g)d\nu = \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu$ (►LINÉARITÉ).

ii) $(f \leq g) \Rightarrow \left(\int f d\nu \leq \int g d\nu\right)$ (►MONOTONICIE).

Chapitre 3

Fonctions de variables complexes

Sommaire

Mots clés 3.1 Fonctions analytiques, fonctions holomorphes, lacets, homotopie, ouvert simplement connexe, Théorème de Cauchy, Théorème des résidus, lemme de Jordan.

Dans le chapitre précédent, nous avions construit à partir d'une mesure ν donnée, l'intégrale de Lebesgue dont on a vu qu'elle rend des valeurs plus intéressantes que l'intégrale de Riemann pour des fonctions mesurables à valeurs *réelles*. Maintenant si $f(x) = g(x) + \mathbf{i}h(x)$ où g, h sont des fonctions mesurables à valeurs réelles, alors on peut définir facilement l'intégrale d'une fonction complexe f par :

$$\int f(x)\nu(\mathrm{d}x) \stackrel{\text{def}}{=} \int g(x)\nu(\mathrm{d}x) + \mathbf{i}\int h(x)\nu(\mathrm{d}x).$$

On définit ainsi les intégrales de fonctions mesurables à valeurs *complexes*, certaines propriétés (comme le théorème de Lebesgue par exemple) se généralisant aisément à ce type d'intégrale.

Malgré tout, le terme d'intégration $\nu(\mathrm{d}x)$ reste "réel". D'autre part, il arrivera souvent que nous aurons à calculer des quantités de la forme

$$\int [f \circ \gamma(x)]\, \gamma'(x)\nu(\mathrm{d}x)$$

où f et γ sont à valeurs complexes. On a envie de faire une sorte de "changement de variable", i.e. de poser $z = \gamma(x)$. Ce n'est pas un changement de variable au sens classique puisqu'ici x est réel tandis que z est complexe. On tirerait alors de $z = \gamma(x)$ que $\mathrm{d}z = \gamma'(x)\mathrm{d}x$ et l'intégrale s'écrirait alors

$$\int [f \circ \gamma(x)]\, \gamma'(x)\nu(\mathrm{d}x) = \int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$$

où Γ serait l'image dans $\mathbb{C}$ de la fonction γ. Ce faisant, le terme d'intégration $\mathrm{d}z$ à droite de l'égalité concerne des valeurs de z *complexes* et à ce niveau là du cours, nous ne savons pas encore intégrer sur des complexes. L'objet de ce chapitre permettra de définir proprement ce type d'intégrale appelé "intégrale curviligne". Nous verrons ici un certain nombre de théorèmes qui permettront de calculer aisément ce type d'intégrale. Le domaine traitant des intégrales curviligne s'appelle *l'analyse complexe*. S'il ne fallait retenir qu'un seul théorème dans ce chapitre, c'est **le théorème des résidus**.

Dans tout ce chapitre, Ω **désignera un ouvert de** $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On identifie couramment $\mathbb{C}$, muni du module, à $\mathbb{R}^2$, muni de la norme euclidienne, au moyen de l'isométrie canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & z = x + \mathbf{i}y \end{array}$$

On écrit alors par abus $f(z) = P(x,y) + \mathbf{i}Q(x,y)$ où $P = \mathcal{R}\mathrm{e}\ f$ (resp. $Q = \mathcal{I}\mathrm{m}\ f$) désigne la partie réelle (resp. imaginaire) de f.

3.1 Fonctions holomorphes et analytiques

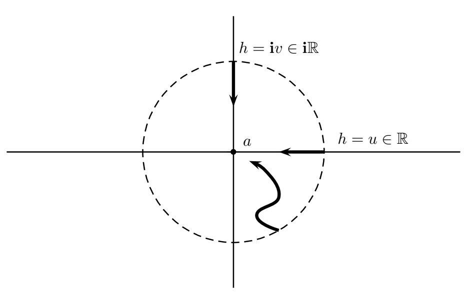
Fonctions holomorphes

Définition 3.1.1 Soit $a \in \Omega$. La fonction f est dite *holomorphe en* a ssi f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, i.e.

$$\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}^*} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existe.}$$

Cette limite est alors appelée dérivée de f en a et on la notera $f'(a)$. La fonction f est dite *holomorphe sur* Ω ssi elle est holomorphe en tout point de Ω. Enfin, on désignera par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Nous soulignons que dans cette définition, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ doit tendre vers la même limite **quelle que soit** la manière dont h s'approche de 0. De ceci vont découler un certain nombre de résultats, dont les "conditions de Cauchy" que nous voyons à présent. Choisissons de faire tendre h vers 0 suivant l'axe des abscisses en posant $h = u \in \mathbb{R}$ puis, suivant l'axe des imaginaires en posant $h = \mathbf{i}v \in \mathbf{i}\mathbb{R}$.



$a + h$ tend vers a de toutes les façons possibles !

Nous avons alors :

$$f'(a) = \lim_{u\to 0, u\in\mathbb{R}^*} \frac{f(a+u)-f(a)}{u} = \lim_{v\to 0, v\in\mathbb{R}^*} \frac{f(a+\mathbf{i}v)-f(a)}{\mathbf{i}v}$$

Posons $a = a_1 + \mathbf{i}a_2$, alors $a+u$ est une "perturbation" de a sur sa valeur réelle et de la même façon, $a+\mathbf{i}v$ est une "perturbation" de a sur sa valeur imaginaire. L'égalité précédente s'écrit alors

$$\left.\frac{\partial}{\partial x} f(x+\mathbf{i}y)\right|_{(x,y)=(a_1,a_2)} = \frac{1}{\mathbf{i}} \left.\frac{\partial}{\partial y} f(x+\mathbf{i}y)\right|_{(x,y)=(a_1,a_2)}$$

ce qui donne en posant $f(z) = P(x,y) + \mathbf{i}Q(x,y)$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}[P(x,y)+\mathbf{i}Q(x,y)]\right|_{(x,y)=(a_1,a_2)} = \frac{1}{\mathbf{i}} \left.\frac{\partial}{\partial y}[P(x,y)+\mathbf{i}Q(x,y)]\right|_{(x,y)=(a_1,a_2)}$$

et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les conditions dites de Cauchy

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

ces deux égalités ayant lieu au point $(x,y) = (a_1,a_2)$. Réciproquement, si ces deux conditions sont vérifiées alors, en utilisant la $\mathbb{R}$-différentiabilité de la fonction de deux variables : $(x,y) \mapsto (P(x,y), Q(x,y))$, on peut montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en a et par conséquent que f est holomorphe en a. Résumons cela dans la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *La fonction f est holomorphe en $a = a_1 + ia_2 \in \Omega$ ssi*

i) P et Q sont différentiables en (a_1,a_2)

ii) P et Q vérifient les conditions de Cauchy :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad \textit{au point } (x,y) = (a_1,a_2). \quad (\blacktriangleright\text{CONDITIONS DE CAUCHY})$$

Il existe aussi des formules de Cauchy associées à la décomposition suivant les coordonnées polaires (et non cartésiennes), ce qui sera vu en séances de travaux dirigées. Cette proposition permet donc de vérifier facilement le caractère holomorphe de fonctions dont on peut extraire simplement les parties réelles et imaginaires, P et Q, exprimés en tant que fonctions des coordonnées cartésiennes x et y. Néanmoins dans des situations courantes, ces parties réelles et imaginaires *en tant que fonctions de x et y* ne sont pas si faciles à identifier et nous devons passer par d'autres approches. Avant de décrire certaines propriétés de stabilité, montrons une utilisation simple des conditions de Cauchy à travers un exemple.

Exemple 3.1.1 Si f est la fonction transpose : $f(z) = \bar{z} = x - \mathbf{i}y$, on voit que $P(x,y) = x$ et $Q(x,y) = -y$, ce qui montre que $\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}$. Les conditions de Cauchy ne sont pas vérifiées et la fonction transpose n'est donc pas holomorphe.

Nous terminons cette section par quelques propriétés élémentaires de stabilité : Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tous complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

i) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

ii) $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(fg)' = f'g + fg'$.

iii) Si f ne s'annule pas sur Ω, $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

De plus, si f est holomorphe sur un ouvert Ω à valeurs sur un ouvert Ω' et g holomorphe sur Ω' alors la composée $g \circ f$ est holomorphe sur Ω avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Ce qui en clair signifie : *"la composée de deux fonctions holomorphes reste holomorphe"*.

On aura aussi à utiliser la propriété suivante : si f est une fonction $\mathbb{R}$-dérivable, définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $f : I \to \Omega'$ et g holomorphe sur l'ouvert Ω' alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I de dérivée $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Ce qui en clair signifie : *"la composée d'une fonction holomorphe et d'une fonction dérivable est dérivable"*.

Fonctions analytiques

Dans toute la suite, on désigne par

$$\begin{cases} B(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}; |z-a| < r\}, & \text{le disque ouvert de centre } a \in \mathbb{C} \text{ et de rayon } r \in \bar{\mathbb{R}}^+ \\ \bar{B}(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leq r\}, & \text{le disque fermé.} \end{cases}$$

On notera qu'on a alors $B(a,0) = \emptyset$ et $B(a,+\infty) = \mathbb{C}$.

On rappelle qu'étant donné une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, il existe un unique élément $r \in \mathbb{R}^+$, appelé *rayon de convergence*, tel que :

$$\text{la série entière } \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \begin{cases} \text{converge pour } |z| < r & \text{i.e. pour } z \in B(0,r) \\ \text{diverge pour } |z| > r \end{cases}$$

De plus, la convergence de la série entière est *absolue* dans le disque ouvert de convergence $B(0,r)$ et *uniforme* sur tout sous-ensemble compact inclus dans $B(0,r)$. Par contre, pour $|z| = r$, tout peut se passer ; pour certaines séries, il y aura convergence pour certaines valeurs de z sur le disque de rayon r, pour d'autres, il y aura divergence pour tous les $|z| = r$. On ne sait pas a priori et c'est à établir au cas par cas... Venons en à la définition des fonctions analytiques :

Définition 3.1.3 La fonction f est dite *analytique en* $z_0 \in \Omega$ (on rappelle que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$) ssi il existe un réel $r > 0$ tel que

i) $\bar{B}(z_0,r) \subset \Omega$.

ii) Pour tout $z \in B(z_0,r)$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ où (c_n) sont les coefficients d'une série entière de rayon de convergence $\geq r$.

On dit que f est *analytique sur* Ω si elle est analytique en tout point de Ω.

En mots simples, une fonction est analytique sur un ouvert ssi elle est développable en série entière dans un voisinage de chacun des points de l'ouvert. Voyons maintenant un exemple très simple de fonction analytique :

Exemple 3.1.2 Un polynôme $P(z)$ à coefficients complexes admet un développement de Taylor exact (puisqu'en dérivant le polynôme suffisamment de fois, on obtient la fonction nulle) qui s'écrit :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

et on en tire clairement que P est analytique sur $\mathbb{C}$.

A priori, les notions d'holomorphie et d'analyticité d'une fonction sont bien distinctes, du moins dans leur définition. Pour autant, ce n'est pas le cas. Il s'avère et c'est remarquable, que sur un ouvert, une fonction holomorphe est analytique, et réciproquement ! ! Ceci est obtenu par le théorème de Cauchy (ou plutôt un des nombreux théorèmes de Cauchy) que nous voyons dans le paragraphe suivant.

Lien entre fonctions analytiques et fonctions holomorphes

Le sens le plus simple à concevoir est celle allant de l'analyticité vers l'holomorphie : *toute fonction analytique est nécessairement holomorphe.* Ce résultat n'est pas surprenant mais la preuve bien que simple, nécessite quelques résultats techniques sur les séries entières qui risquent d'alourdir l'exposé. Nous admettrons donc le théorème et laissons sa démonstration en exercice.

Théorème 3.1.4 (analytique $\to$ holomorphe). *Soit* $(\sum_{n\geq 0} c_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une série entière de rayon de convergence* $\geq r$. *Alors,*

i) La somme de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *est* **holomorphe** *sur* $B(0,r)$, *de fonction dérivée* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$.

ii) La somme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur son disque ouvert de convergence $B(a,r)$, ses dérivées successives s'obtenant par dérivation terme à terme.

iii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $c_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}$. c'est-à-dire qu'une série entière est la série de Taylor de sa somme.

Le passage de i) à ii) est obtenu par récurrence et translation de $-a$. Passons maintenant au sens le plus remarquable, à savoir : *une fonction holomorphe est nécessairement analytique.* Ce résultat est appelé *Théorème de Cauchy.* On voit donc que supposer la $\mathbb{C}$-dérivabilité, implique énormément de choses, notamment une dérivabilité à tous ordres et une écriture de f en série entière autour de chaque point de Ω.

Théorème 3.1.5. De Cauchy-. *[holomorphe→analytique]. Soit f une fonction holomorphe sur Ω alors f est analytique sur Ω. De plus, si $\bar{B}(z_0,r) \subset \Omega$,*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n \quad \text{pour tout } z \in B(z_0,r) \qquad (\blacktriangleright \text{Expression de } f \text{ en fonction de } c_n)$$

avec

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})\mathrm{e}^{-\mathbf{i}nt}\mathrm{d}t \qquad (\blacktriangleright \text{Expression de } c_n \text{ en fonction de } f)$$

La preuve de ce théorème dépasse le cadre de ce cours. Pourtant il est riche en enseignement, nous choisissons donc de le mettre en appendice, ce qui permettra de satisfaire l'appétit des lecteurs les plus curieux. On remarquera que dans la définition de c_n le terme r semble intervenir mais en réalité par unicité du développement en série entière, c_n ne dépend pas de r pourvu que la condition $\bar{B}(z_0,r) \subset \Omega$ soit vérifiée.

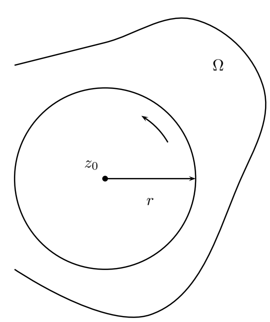


Figure 3.1 – $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})}{z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}-z} r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\mathrm{d}t$ dans le Corollaire 3.1.6

Corollaire 3.1.6. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1.5, on a : si $\bar{B}(z_0,r) \subset \Omega$ alors pour tout $z \in B(z_0,r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})}{z_0+r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}-z} r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}\mathrm{d}t$$

Conséquences pratiques- Revenons sur les différents résultats obtenus et voyons maintenant comment d'un point de vue pratique, montrer qu'une fonction f est holomorphe. Au vu des résultats précédents, plusieurs solutions s'offrent à nous :

i) soit revenir à la définition des fonctions holomorphes,

ii) soit utiliser les conditions de Cauchy,

iii) soit montrer que f est obtenue par composition, addition (ou autres opérations) de fonctions holomorphes,

iv) soit montrer que c'est une fonction analytique, i.e. développable en série entières au voisinage de chacun de ses points.

Remarque 3.1.1 Pour introduire la partie suivante, reprenons l'expression de f par la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})}{z_0 + re^{\mathrm{i}t} - z} re^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z}\gamma'(t)\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad \gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$$

Il s'agit donc d'une intégrale sur le cercle de centre z_0 de rayon r (car $\gamma(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$ décrit ce cercle lorsque t parcours $[0, 2\pi]$). Nous allons en fait chercher à généraliser ce résultat à tout "chemin" entourant z_0 et pas seulement le cercle de rayon r. Nous commencerons par définir l'intégrale curviligne qui nous permettra d'intégrer des fonctions sur des chemins plus compliqués que les cercles.

3.2 Intégration curviligne

TERMINOLOGIE-. On appellera *chemin* (ou *arc*) une application continue γ d'un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on dira qu'il est *fermé* (ou que c'est un *lacet*) si de plus $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. On s'intéressera uniquement dans ce cours à des chemins de classe $\mathcal{C}^1$-par morceaux, i.e. des chemins pour lesquels il existe $c_1, \ldots, c_k$ tels que $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha < c_1 < \ldots < c_k < c_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} \beta$ tels que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c_i, c_{i+1}[$ et telle que $|\gamma'(t)|$ soit majoré par une constante M partout où γ' est définie. En particulier, l'intégrale

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$$

existe et on l'appellera *longueur* du chemin γ.

Définition 3.2.1 On définit l'*intégrale curviligne* d'une fonction continue $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sur un arc orienté γ par :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t,$$

où $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto U$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$-par morceaux.

Cette définition formalise d'un point de vue mathématique une intuition qui consisterait à dire que si $z = \gamma(t)$ alors $\mathrm{d}z = d(\gamma(t)) = \gamma'(t)\mathrm{d}t$ et on a alors : $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z \stackrel{\text{def}}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.

On montre par simple changement de variable que cette intégrale est invariante par reparamétrisation croissante, i.e. si $\varphi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ est une bijection *croissante* de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

On voit donc que le sens de parcours des chemins compte (la fonction φ est croissante), on dit aussi que ces chemins sont *orientés*. De plus, on peut montrer pour l'intégrale curviligne, un certain nombre de propriétés élémentaires particulièrement utiles pour la suite

$$\int_{\gamma^\star} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$
$$\int_{\gamma_1\ldots\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$$
$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \left(\sup_{z\in\mathcal{I}m\gamma} |f(z)|\right) L(\gamma)$$
$$\int_{g(\gamma)} f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f[g(z)]g'(z)\mathrm{d}z$$

où $\gamma^\star$ est l'arc opposé de γ dont les représentants sont ceux de γ "parcourus en sens inverse" (i.e. $\gamma^\star(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$), où $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ est le produit de n arcs orientés consécutifs $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, où

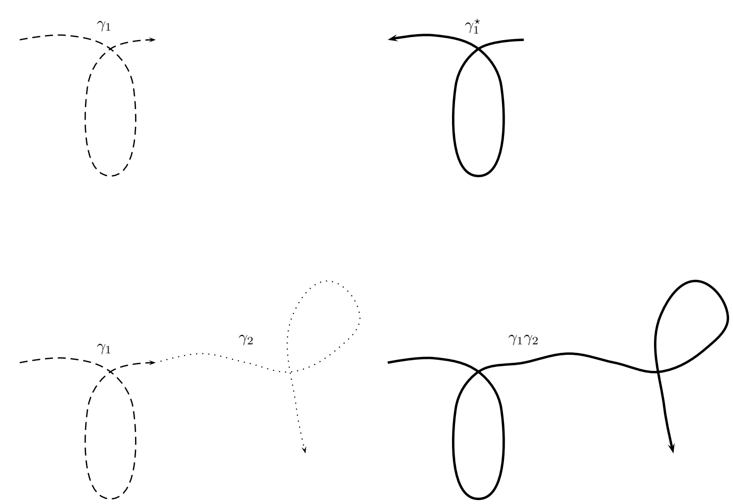


FIGURE 3.2 – Différentes opérations sur les chemins orientés

$\mathcal{I}m\gamma = \gamma([\alpha,\beta])$ et $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$ sont respectivement l'image et la longueur de γ et enfin où $g(\gamma)$ est l'arc orienté image de γ par g, g étant holomorphe de dérivée continue.

Ces propriétés impliquent en particulier que si $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ alors $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1\gamma_2^\star} f(z)\mathrm{d}z$ et si $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, alors $\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2^\star\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$, propriétés que nous aurons fréquemment à utiliser par la suite.

3.3 Fonctions logarithmique et puissances

Fonction logarithme

Il n'y a pas de difficulté à définir l'exponentielle d'un nombre complexe $x+\mathrm{i}y$ par $\exp(x+\mathrm{i}y) = \exp(x)(\cos(y)+\mathrm{i}\sin(y))$. Par contre la fonction exp n'est pas injective (car $\exp(2\mathbf{i}\pi) = \exp(4\mathbf{i}\pi)$ par exemple) et on peut donc s'attendre à ce que la fonction logarithme qui est la fonction réciproque de l'exponentielle va poser plus de difficultés. Un nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ peut s'écrire sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}(\theta+2k\pi)}$ où $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Il peut être tentant de définir la fonction $\ln z$ par

$$\ln z = \ln r + \mathbf{i}(\theta + 2k\pi) \tag{3.1}$$

mais on voit alors que la partie imaginaire n'est pas unique (puisqu'elle dépend de k). On parle alors de fonction *multiforme* puisqu'en un point z fixé, $\ln z$ peut prendre une infinité de valeurs. Evidemment, ce qui va nous intéresser ici ce sont des "représentants" du logarithme qui soient holomorphes et donc continues. Commençons par la définition des déterminations continues du logarithme.

Définition 3.3.1 On dit qu'une fonction f de la variable complexe z définie sur un ouvert connexe par arc $U \subset \mathbb{C}$ est une *détermination continue* du logarithme sur U ssi f est continue et

$$\forall z \in U, \quad \exp(f(z)) = z$$

Notons maintenant $\Omega_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} \in \mathbb{C}^*; \theta \in]\alpha, \alpha+2\pi[\}$. On insiste que les bornes de l'intervalle que décrit θ sont exclues. En d'autres termes, Ω_α est l'ouvert décrit par $\mathbb{C}$ privé d'une demi droite d'angle α par rapport à l'axe des abscisses. On admettra le théorème suivant :

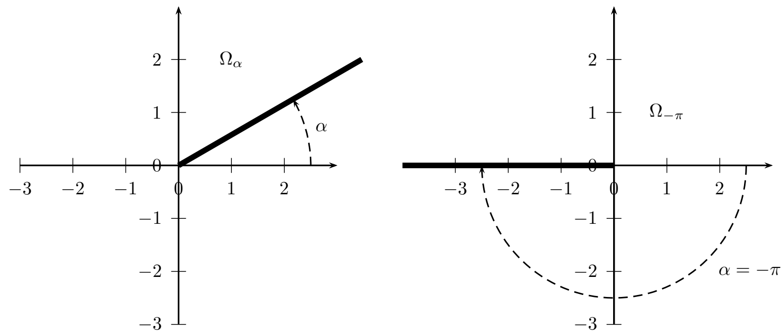


FIGURE 3.3 – On retire une demi-droite d'angle α, cf Théorème 3.3.2

Théorème 3.3.2. *La fonction*

$$\ln z : \begin{cases} \Omega_\alpha & \to \mathbb{C} \\ z = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta} & \mapsto \ln z \stackrel{\text{def}}{=} \ln r + \mathbf{i}\theta \end{cases} \qquad \textit{avec} \qquad \begin{cases} r > 0 \\ \theta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[\end{cases}$$

est une détermination continue du logarithme sur Ω_α. De plus, cette fonction est holomorphe sur Ω_α *et*

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}.$$

TERMINOLOGIE- On appellera *détermination principale* du logarithme, l'application définie dans le théorème 3.3.2 dans le cas particulier où $\alpha = -\pi$. L'ensemble $\Omega_{-\pi}$ correspond alors à $\mathbb{C}$ privé de la demi-droite des réels négatifs.

En termes très simples, pour définir une fonction ln qui soit holomorphe, il faut choisir de paramétrer l'angle sous la forme $]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Par exemple : $] - \pi, \pi[$ ou $]0, 2\pi[$ ou $] - \pi/2, 3\pi/2[$ etc. Ce qui au fond est assez naturel. Pour comprendre pourquoi on doit exclure les deux bornes, supposons qu'on choisisse de définir ln comme dans le Theorème 3.3.2 mais où $\theta \in]0, 2\pi]$ (autrement dit, la borne supérieure est incluse). Alors $\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \ln\left(r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} \ln r + \mathbf{i}\epsilon = \ln r$ qui est donc différent de $\ln(r\mathrm{e}^{\mathbf{i}2\pi}) = \ln r + 2\mathbf{i}\pi$ alors qu'on a bien $\lim_{\epsilon \to 0, \epsilon > 0} r\mathrm{e}^{\mathbf{i}\epsilon} = r = r\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi}$, ce qui donnerait une fonction ln qui ne serait pas continue en r et ça, on ne veut pas. Pour la rendre continue et même holomorphe, nous avons donc été conduit à exclure les deux bornes, ce qui revient dans $\mathbb{C}$ à exclure une demi droite passant par l'origine.

Remarque 3.3.1 (Ne pas lire cette remarque dans une première lecture) Ce théorème implique en particulier que la fonction $1/z$ admet une primitive holomorphe sur l'ouvert Ω_α. Ce qui est bien cohérent avec le Théorème 3.C.4 puisque Ω_α est un ouvert simplement connexe. On remarquera par contre que $\mathbb{C}^*$ n'est pas simplement connexe et il n'est pas étonnant alors qu'il n'existe pas de primitive de $1/z$ sur cet ouvert comme nous pouvons le voir dans l'exercice corrigé 3.1 qu'on pourra lire à titre indicatif uniquement (car la démonstration bien que courte est assez difficile).

EXERCICE CORRIGÉ 3.1 Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par l'absurde. Supposons en effet qu'il existe f, détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ et posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ défini par $g(\theta) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$. Il est clair que g est continue et par composition, on a donc que $f \circ g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^{f \circ g(\theta) - \mathbf{i}\theta} = g(\theta)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\theta} = 1$, il vient que

$$\exists k(\theta) \in \mathbb{Z}, \quad f \circ g(\theta) - \mathbf{i}\theta = 2\mathbf{i}k(\theta)\pi$$

La fonction $\theta \mapsto k(\theta) = (f \circ g(\theta) - \mathbf{i}\theta)/(2\mathbf{i}\pi)$ est donc une fonction continue de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc elle est constante : il existe k telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(\theta) - \mathbf{i}\theta = 2\mathbf{i}k\pi \tag{3.2}$$

En appliquant l'égalité précédente à $\theta + 2\pi$, il vient :

$$f \circ g(\theta + 2\pi) - \mathbf{i}(\theta + 2\pi) = 2\mathbf{i}k\pi \tag{3.3}$$

On soustrait maintenant Eq. (3.3) à Eq. (3.2), en tenant compte que $g(\theta) = g(\theta + 2\pi)$, il reste

$$2\mathbf{i}\pi = 0$$

ce qui est absurde. La preuve de l'exercice est achevée. ■

Fonction puissance

Pour pouvoir définir correctement la fonction holomorphe racine carrée : $z \mapsto \sqrt{z}$ ou même plus généralement la fonction holomorphe puissance $z \mapsto z^\beta$ où β est un réel quelconque (donc pas nécessairement entier), on va poser par définition :

$$z^\beta = \exp(\beta \ln z), \quad \text{avec } z \in \Omega_\alpha$$

avec l'ensemble Ω_α et la fonction ln tels que définis dans le Théorème 3.3.2). Par composition de fonctions holomorphes, la fonction z^β reste holomorphe sur Ω_α.

3.4 Indice d'un point par rapport à un lacet orienté

La fonction $1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et son intégrale sur un cercle centré en 0 mesure la différence entre deux déterminations du logarithme soit $2\mathbf{i}\pi$. Si on fait n fois le tour de l'origine, en intégrant sur le cercle paramétré par $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}nt}$ ($t \in [0, 2\pi]$), l'intégrale vaut $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)\mathrm{d}t = 2n\mathbf{i}\pi$. Autrement dit, en calculant une simple intégrale, on sait combien de fois on a fait le tour de l'origine. Evidemment, par le théorème Cauchy homotopique, ce résultat se généralise à des lacets homotopes aux cercles faisant n fois le tour de l'origine. Dans ce paragraphe, on va généraliser et prolonger cette remarque.

Théorème et Définition 3.4.1 Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ un lacet et soit $a \in \mathbb{C}$ qui n'appartient pas à l'image du lacet : $a \notin \gamma[0, 1]$. Alors, le nombre

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - a}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}\mathrm{d}t$$

est un entier relatif. Le nombre $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ sera alors appelé *indice de a par rapport au lacet γ.*

Démonstration. On va montrer le résultat pour un lacet γ de classe $\mathcal{C}^1$ et non pas $\mathcal{C}^1$ par morceaux (si on voulait le montrer dans le cas général, il aurait fallu travailler sur chaque intervalle où γ est $\mathcal{C}^1$ et "recoller" ensuite les morceaux, mais l'idée générale de la preuve reste la même.) Avant de commencer, donnons un peu l'intuition du résultat : pour obtenir que $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ est entier, on va montrer que $\exp\left(\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\mathrm{d}t\right) = 1$, ce qui achèverait directement la preuve puisque $\exp(u) = 1$ ssi $u \in 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}$. Pour cela,

$$\text{posons} \quad g(s) = \exp\left(\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}\mathrm{d}t\right) \quad \text{et montrons} \quad g(1) = 1.$$

Que peut donc valoir g ? Si γ était à valeurs réelles, on peut tout intégrer, et un simple calcul donne que g est égal à $\gamma - a$ à une constante multiplicative près, c'est à dire que $g/(\gamma - a)$ est constant. Seulement, pour obtenir ce résultat lorsque γ est réel, on doit intégrer $1/z$ ce qui est délicat lorsque z est complexe. En fait, plutôt que d'intégrer, on va dériver, c'est à dire que pour démontrer que $g/(\gamma - a)$ est constant, on va montrer que sa dérivée est nulle ! ! Comme $g(s) = \exp\left(\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\mathrm{d}t\right)$, il vient :

$$g' = \frac{\gamma'}{\gamma - a}g \Longrightarrow g'(\gamma - a) - \gamma' g = 0 \Longrightarrow \left[\frac{g}{\gamma - a}\right]' = \frac{g'(\gamma - a) - \gamma' g}{(\gamma - a)^2} = 0$$

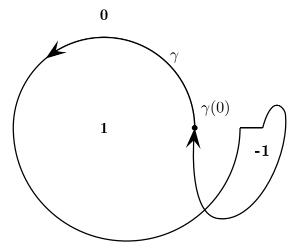


FIGURE 3.4 – Les indices sont constantes sur chaque partie connexe par arc de $\mathbb{C} \setminus \gamma[0, 1]$.

Donc $g/(\gamma - a)$ est constant, ce qui implique

$$\frac{g(0)}{\gamma(0) - a} = \frac{g(1)}{\gamma(1) - a},$$

et finalement comme γ est un lacet, $\gamma(0) = \gamma(1)$ et par ailleurs $g(0) = 1$, il reste alors $g(1) = 1$ ce qui achève la preuve. ■

Dans la plupart des situations apparaissant dans ce cours, les lacets seront parcourus autour de a une fois dans le sens positif (i.e. dans le sens des θ croissants, i.e. dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), ce qui fait que l'indice associé sera simplement égal à 1.

Le théorème précédent a établi que $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ était un entier. On peut maintenant se demander comment varie cet entier lorsque a décrit un certain ensemble. C'est l'objet de la proposition suivante. Auparavant, et pour mieux comprendre la preuve, rappelons certaines propriétés liées à la *connexité par arc* : si A est un ensemble *connexe par arc* alors

i) $\forall x, y \in A$, il existe $\gamma : [0, 1] \to A$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
   (▶DEUX POINTS QUELCONQUES SONT JOIGNABLES PAR UN ARC CONTINU TRACÉ DANS A)

ii) Toute fonction continue de A à valeurs entières est constante.

Proposition 3.4.2. *L'indice* $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ *est constante sur chaque partie connexe par arc de* $\mathbb{C} \setminus \gamma[0, 1]$*, nulle sur chaque partie connexe par arc non bornée.*

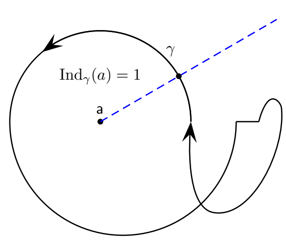
DÉMONSTRATION. En utilisant la continuité sous le signe intégral, la fonction $a \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z$ est continue sur l'ouvert Ω et est à valeurs entières, elle est donc constante sur chaque partie connexe par arc de Ω. Maintenant, soit A une partie connexe par arc non bornée de Ω, considérons une suite a_n de A tendant vers l'infini. Alors, l'indice étant constant sur A, on a : pour tout $a \in A$,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \mathrm{Ind}_\gamma(a_n) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a_n} \mathrm{d}t \to_{n \to \infty} 0$$

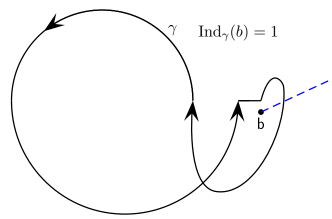
où le dernier résultat vient de la permutation limite intégrale pour $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a_n} \mathrm{d}t$. ■

Nous illustrons cette proposition sur la figure 3.4 où nous remarquons que le lacet γ découpe $\mathbb{C}$ en trois parties connexes par arc surlesquelles les indices sont constantes (et valent respectivement 0,1 et -1).

COMMENT FAIT-ON POUR CALCULER L'INDICE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN LACET γ-



A partir du point a, on trace une demi-droite qui va couper le lacet en zéro, un, ou plusieurs points. On s'arrange pour prendre la demi droite qui coupe le "moins possible" le lacet. Si le franchissement de la demi droite par le lacet est dans le sens positif (ou sens des θ croissant), alors la contribution est de $+1$ à chaque franchissement. Ici, $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1}$. Par contre, $\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(b) = -1}$



3.5 Théorème des résidus

3.5.1 Séries de Laurent

On cherche à représenter une fonction holomorphe sur une couronne circulaire ouverte de centre a comme la somme d'une série de puissances (positives et négatives) de $(z-a)$. La différence avec le développement en série entière est que la fonction n'est pas nécessairement définie en a.

Théorème 3.5.1. *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $\{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z-a| < r_2\}$, alors f est développable en série de Laurent de manière unique dans cette couronne i.e. il existe une suite de complexes (c_n) telle que*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \textit{pour tout } z \textit{ vérifiant} \quad r_1 < |z-a| < r_2$$

De plus, pour tout $r \in]r_1, r_2[$,

$$c_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) e^{-n\mathrm{i}t} \mathrm{d}t$$

où $t \mapsto \gamma_{a,r}(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est le lacet parcourant le cercle de centre a de rayon r une fois dans le sens direct.

Une conséquence de ce théorème est que $\int_{\gamma_{a,r}} f(z)\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi c_{-1}$ et donc en vertu du Théorème 3.C.3 si γ est homotope à $\gamma_{a,r}$ dans la couronne circulaire alors on a encore $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi c_{-1}$. Autrement dit, on peut calculer l'intégrale $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ à condition de connaître c_{-1}. Nous allons maintenant généraliser ce résultat. Avant cela, commençons par distinguer les types de singularité de la fonction f.

3.5.2 Singularité

Soit f holomorphe sur le *disque pointé* $0 < |z-a| < r$. Le développement en série de Laurent donne sur le disque pointé :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Trois situations peuvent se présenter pour la singularité a.

Définition 3.5.2

a est une singularité de type	Condition 1	Condition 2
singularité factice	$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$	$\exists \lim_{z\to a} f(z)$
pôle d'ordre p (avec $p\geq 1$)	$f(z)=\sum_{n=-p}^{\infty} c_n(z-a)^n$ et $c_{-p}\neq 0$	$\exists \lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$
singularité essentielle	il existe une infinité de $c_{-p}\neq 0$	$\forall p\geq 0$, $\nexists \lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$

Il faut lire la définition précédente de la façon suivante : "a est une singularité de type XXX ssi l'une des conditions 1 **ou** 2 est vérifiée".

3.5.3 Théorème des résidus et lemmes de Jordan

Définition 3.5.3 On dira que a *une singularité isolée d'une fonction* f si f est holomorphe sur un voisinage de a ne contenant pas a (donc en a tout peut se passer, certaines fonctions seront holomorphes en a, d'autres non). Autrement dit, il existe $r>0$ tel que f est holomorphe sur $B(a,r)\backslash\{a\}$. On appelle *résidu de f en a* le coefficient d'indice -1 du développement en série de Laurent de f au voisinage de a :

$$\mathrm{Res}(f,a)=c_{-1}.$$

Le théorème suivant est le fameux *théorème des résidus*. C'est le résultat phare de ce chapitre et on fera attention à bien vérifier les hypothèse de ce théorème quand il s'agira de l'appliquer. On peut le considérer comme une généralisation du théorème de Cauchy ; il ramène une intégrale à une somme finie dont les termes prennent en compte le comportement divergent de la fonction en des points qui ne sont pas traversés par le lacet d'intégration.

Théorème 3.5.4. DES RÉSIDUS- *Si on a les deux conditions suivantes :*

i) Ω un ouvert **simplement connexe**, *i.e. tout lacet inscrit dans Ω se réduit continûment à un point de Ω (est homotope à zéro : voir Définition 3.C.2).*

ii) f est **holomorphe sur** $\Omega\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$, *i.e.* $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a_1,\ldots,a_n\})$,

Alors,

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2i\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\mathrm{Res}(f,a_k)}$$

où γ est un lacet sur Ω qui ne passe par aucun des points $\{a_i\}_{1\leq i\leq n}$.

Dans la plupart des situations rencontrées dans la pratique, $\Omega=\mathbb{C}$ ou Ω est une boule ou Ω est un rectangle ou Ω est un demi-plan. Attention, c'est bien Ω et non pas $\Omega\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$ qui doit être simplement connexe. Dans la plupart des situations, ce théorème s'applique dans le cas suivant : si pour chaque singularité a_k, γ est un lacet qui entoure a_k une seule fois dans le sens positif alors les indices $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ valent tous 1, et il vient :

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2i\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,a_k).$$

Evidemment, ce théorème n'est intéressant que si le calcul des résidus est simple à effectuer. Ce que nous voyons à présent.

Calcul pratique des résidus

Nous donnons ici quelques résultats pratiques pour calculer les résidus en fonction de la nature de la singularité de a :

COMMENT CALCULER UN RÉSIDU ?-

i) Pour a *singularité factice* de f, $\mathrm{Res}(f,a)=0$;

ii) Pour a *pôle d'ordre* p de f, $\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{p-1}}{\mathrm{d}z^{p-1}}[(z-a)^p f(z)] \in \mathbb{C}$;
En particulier, pour a pôle simple, $\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \in \mathbb{C}^*$, de sorte que si $f = \frac{F}{G}$ avec $F, G \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $F(a) \neq 0$ et a zéro simple de G (vérifiable par $G(a) = 0$ mais $G'(a) \neq 0$)

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\underbrace{f(z)}_{F(z)/G(z)} = \lim_{z\to a}\frac{F(z)}{[G(z)-G(a)]/(z-a)} = \frac{F(a)}{G'(a)} \in \mathbb{C}^*.$$

iii) Pour a singularité essentielle de f, il n'y pas de méthode générale de calcul du résidu, il faut revenir à la définition du résidu.

Quand on a un doute sur l'ordre d'un pôle, on pourra employer la méthode suivante :

Comment connaître l'ordre d'un pôle ?- Si f s'écrit $f = P/Q$ avec $P(a) \neq 0$, $Q(a) = Q'(a) = \cdots = Q^{(p-1)}(a) = 0$ et $Q^{(p)}(a) \neq 0$ alors a est un pôle d'ordre p de f.

Le théorème des résidus permet, en association avec les lemmes de Jordan, le calcul de nombreuses intégrales réelles généralisées.

Lemme 3.5.5. de Jordan- *Soit f une application continue sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$. Soit (γ_r) une famille d'arc paramétrés tracés dans Ω, $\gamma_r : [\alpha_r, \beta_r] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} + a$ et $0 \leq \alpha_r \leq \beta_r < 2\pi$. Autrement dit, $(\gamma_r)_{r\in I}$ est une famille d'arcs de cercle (tracés dans Ω) orientés de centre* fixe *$a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$.*

i) Si pour tout $t \in [0, 2\pi[$,

$$\lim_{r\to 0}(\gamma_r(t) - a) \times f \circ \gamma_r(t) \times \mathbf{1}_{]\alpha_r,\beta_r[}(t) = 0 \tag{3.4}$$

alors $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

ii) Si pour tout $t \in [0, 2\pi[$,

$$\lim_{r\to\infty}\gamma_r(t) \times f \circ \gamma_r(t) \times \mathbf{1}_{]\alpha_r,\beta_r[}(t) = 0 \tag{3.5}$$

alors $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

On souligne que les chemins qui apparaissent dans le lemme de Jordan sont des chemins particuliers : ce sont des arcs de cercle !!!

Remarque 3.5.1 Souvent, pour vérifier la condition (i), il suffit de vérifier la condition (un peu) plus restrictive suivante :

$$\boxed{\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0}$$

De même, souvent, pour vérifier (ii), il suffit de montrer que

$$\boxed{\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0}$$

Démonstration. On commence par (i). Rappelons que $\gamma_r : [\alpha_r, \beta_r] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t} + a$ et $0 \leq \alpha_r \leq \beta_r < 2\pi$. Alors, puisque $|\gamma_r'(t)| = |r\mathbf{i}\mathrm{e}^{\mathbf{i}t}| = r = |\gamma_r(t) - a|$,

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\alpha_r}^{\beta_r}(\gamma_r(t)-a)\frac{f\circ\gamma_r(t)}{\gamma_r(t)-a}\gamma_r'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\alpha_r}^{\beta_r}|\gamma_r(t)-a|\,|f\circ\gamma_r(t)|\,\underbrace{\frac{|\gamma_r'(t)|}{|\gamma_r(t)-a|}}_{=1}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathbf{1}_{]\alpha_r,\beta_r[}(t)|\gamma_r(t)-a|\,|f\circ\gamma_r(t)|\mathrm{d}t\,. \tag{3.6}$$

Si on a (3.4) alors par le théorème de convergence dominé (vérifiez toutes les conditions), on en tire que $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Si maintenant, on suppose (3.5), alors pour tout $t \in [0, 2\pi[$,

$$\mathbf{1}_{]\alpha_r,\beta_r[}(t)|\gamma_r'(t)|\ |f\circ\gamma_r(t)| = \mathbf{1}_{]\alpha_r,\beta_r[}(t)\ \underbrace{\frac{|\gamma_r'(t)|}{|\gamma_r(t)|}}_{\to_{r\to\infty}1}\ |\gamma_r(t)\times f\circ\gamma_r(t)| \to_{r\to\infty} 0$$

et de nouveau par le théorème de convergence dominée, $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$. ■

3.6 Points essentiels du chapitre

a) Il faut connaître tous les outils pour montrer qu'une fonction est holomorphe.
b) On doit pouvoir facilement calculer l'indice d'un point par rapport à un lacet et on doit pouvoir connaître toutes les techniques pour calculer un résidu.
c) Si le lacet entoure une singularité ou plusieurs singularité, l'intégrale peut être calculée par le théorème des résidus. Le lemme de Jordan permet d'utiliser ensuite le théorème des résidus pour calculer des intégrales impropres.

3.7 Un peu d'histoire

Cauchy (1789-1857). Source : bibmath.

Augustin-Louis Cauchy est le mathématicien français le plus prolifique (avec presque 800 articles publiés). Ses idées politiques et religieuses ont pourtant à plusieurs reprises contrarié sa carrière. Il est né le 21 août 1789, au lendemain des événements de juillet. Son père, premier commis du lieutenant de police de Paris, voyait sa vie menacée par la colère du peuple. Il s'était, pour quelques temps, réfugié avec sa famille à Arcueil. Dès le plus jeune âge, il prend en main l'éducation de son fils, et Augustin est admis à l'Ecole Polytechnique. Celle-ci a à peine 10 ans d'âge, mais déjà les savants les plus prestigieux y enseignent.

A la sortie de l'école, Cauchy est admis dans le corps le plus prestigieux (celui des Ponts et Chaussées), et en 1810, nommé aspirant ingénieur, il participe à la construction du port de Cherbourg. C'est à Cherbourg que Cauchy commence ses recherches mathématiques sur les polyèdres, et ses premiers résultats sont prometteurs. Mais, fatigué par le cumul de la charge d'ingénieur et des longues veillées de recherche, Cauchy connait un état dépressif qui s'éternise et le pousse à retourner vivre chez ses parents.

A Paris, il cherche une situation en adéquation avec sa volonté de faire de la recherche mathématique pure. Malgré l'appui de son père, il se voit devancé par d'autres pour plusieurs postes, avant d'être élu, en 1814, à la société philomathique, antichambre de l'Académie (alors nommé Institut). A la chute de l'empire, Cauchy, royaliste et dévôt, voit de nombreux protecteurs accéder au pouvoir. Leur influence permet sa nomination comme professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique en 1815. Entre-temps, il vient d'achever un brillant mémoire où il démontre un célèbre théorème de Fermat sur les nombres polygonaux. Ceci fera beaucoup pour sa notoriété, et en 1816, il accède à L'Académie des Sciences, en remplacement de Carnot et Monge touchés par l'épuration.

Il est alors temps pour Cauchy de se marier, et sous l'influence de son père (?), il épouse Aloïse de Bure, née d'une famille de célèbres libraires parisiens. Ils auront deux filles.

Le cours d'analyse que Cauchy professe à l'Ecole Polytechnique est décrié tant par ses élèves que par ses collègues des autres matières. Pourtant c'est ce cours, publié en 1821 et 1823, qui devait devenir la référence de l'analyse au XIXème siècle. en mettant en avant la rigueur, et plus seulement l'intuition. C'est la première fois que de vraies définitions de limites, de continuité, de convergence de suites, de séries, sont énoncées. Cette rigueur reste toutefois encore relative, puisque que Cauchy "prouve" que la limite d'une série de fonctions continues est continue, ce qui est faux. Il est vrai que Cauchy ne dispose pas encore d'une définition claire et précise des nombres réels.

C'est l'époque aussi où Cauchy réalise des travaux profonds sur les fonctions d'une variable complexe (établissant par exemple la formule des résidus), ainsi que des avancées dans la théorie des groupes finis. Cauchy ne fut jamais le chef d'une école de mathématiciens, et il se comporta parfois maladroitement avec de jeunes chercheurs comme Abel ou Galois, dont il sous-estime, ou même perd, des mémoires de première importance. Ses relations avec ses collègues ne sont en général pas très faciles. On lui a beaucoup reproché les conditions de son accession à l'Académie, et sa bigoterie intransigeante ne permet pas toujours un contact aisé.

En 1830 éclate la révolution de Juillet, qui va brutalement changer le cours de sa vie. En effet, Cauchy, antilibéral très marqué, s'exile en Suisse, et Italie, en laissant femme et enfants à Paris. Parallèlement, son activité mathématique décroit. Il enseigne à Turin, avant de devenir le précepteur de l'héritier au trone, le petit fils de Charles X, en exil à Pragues ! En 1834, sa famille peut enfin le rejoindre.

En 1838, il retourne en France sous les injonctions de sa mère mourante. Il lui faut retrouver une situation, et il est élu au Bureau des longitudes. Elu, mais pas nommé, car il refuse de prêter serment d'allégeance au roi des français (Louis-Philippe), et ne perçoit donc pas son salaire. Son soutien aux Jésuites lui barre également la route du Collège de France.

En 1848 a lieu une nouvelle révolution, et le problème du serment n'est plus un obstacle pour Cauchy qui peut reprendre ses cours à la Sorbonne. Cauchy décède dans la nuit du 22 au 23 mai 1857, des suites d'un état de fatigue généralisé. Son nom a été donné à un cratère de la lune.

3.A Preuve du Théorème de Cauchy (qui établit le lien entre les fonctions holomorphes et analytiques)

DÉMONSTRATION. (THÉORÈME 3.1.5 ET COROLLAIRE 3.1.6-) On peut se ramener par translation à $z_0 = 0$ ce que nous supposerons dans toute la suite. Soit $|z| < r$. Posons

$$g(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1-\alpha)z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \quad \text{pour } \alpha \in [0,1].$$

On va dériver g (par rapport à α) sous le signe intégral et se rendre compte que l'expression obtenue sous l'intégrale est explicitement intégrable (par rapport à t). Voyons cela de façon plus précise. La fonction f étant holomorphe, g est dérivable et on a par dérivation sous le signe intégral (il faut être sûr de pouvoir dériver sous le signe intégral, et ça, on a un théorème qui permet de le faire à la fin du chapitre précédent, c'est le théorème 2.4.4 et nous invitons le lecteur à vérifier qu'il peut s'appliquer ici) :

$$\forall \alpha > 0,\ g'(\alpha) = \int_0^{2\pi} f'(\alpha r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1-\alpha)z) r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f(\alpha r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1-\alpha)z)}{\mathbf{i}\alpha}\right]\mathrm{d}t = \left[\frac{f(\alpha r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + (1-\alpha)z)}{\mathbf{i}\alpha}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

où la dernière égalité vient de ce que $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est de période 2π. Ainsi, $g'(\alpha) = 0$ sur $]0,1]$. Donc g est une fonction constante sur $[0,1]$. En écrivant maintenant $g(0) = g(1)$ il vient

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - z} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t$$

soit encore

$$f(z)\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - z/r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - z/r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$$

ou encore en utilisant que $|z/r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = |z|/r < 1$

$$f(z)\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\right)^n f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t \tag{3.7}$$

Il nous reste à permuter les symboles $\int$ et $\sum$ dans les deux membres de l'égalité. Mais ça, on sait faire depuis la fin du chapitre précédent. Il suffit de vérifier par exemple que la somme des modules est intégrable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ (Voir Proposition 2.4.1), et effectivement, c'est le cas :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right)^n \right| \mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{r^n} \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{1 - |z|/r} < \infty$$

De même,

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right)^n f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \right| \mathrm{d}t \leq \sup_{u \in [0,2\pi]} |f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})| \frac{2\pi}{1 - |z|/r} < \infty$$

La proposition 2.4.1 nous autorise donc à permuter les signes $\int$ et $\sum$ dans l'Equation (3.7), il vient alors

$$f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right)^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{z}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \right)^n f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t$$

ce qui s'écrit encore, en calculant explicitement les intégrales du membre de gauche :

$$f(z)[2\pi + 0 + \ldots + 0 + \ldots] = \sum_{n \geq 0} z^n \left(\frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{e}^{-n\mathrm{i}t} \mathrm{d}t \right).$$

Et la preuve est achevée. Enfin, on remarquera que dans le courant de cette preuve, on a aussi montré :

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{e}^{it}}{r\mathrm{e}^{it} - z} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t$$

qui est la formule de Cauchy pour $z_0 = 0$. ■

3.B Le principe de prolongement analytique

Que se passe-t-il si deux fonctions analytiques coincident sur un sous ensemble de l'ouvert Ω, peut-on dire qu'elles coincident en tout point de l'ouvert ? Le principe de prolongement analytique répond en partie à la question, c'est ce que nous voyons à présent. Avant cela, faisons un petit rappel de topologie : un ensemble U de $\mathbb{C}$ est *connexe par arc* si tout couple de points de U est joignable par un chemin continu, ce qui en termes plus mathématiques s'écrit : pour tout $x, y \in U$, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to U$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Théorème 3.B.1. Principe de prolongement analytique- *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soient f, g telles que*

i) U est connexe par arc

ii) f et g sont deux fonctions analytiques (ou holomorphes) sur U

iii) Il existe un point qu'on notera z_∞ dans U et une suite de points z_n de U tels que

a) $z_n \to z_\infty$ sans prendre la valeur z_∞,

b) $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n

alors f et g coincident sur U.

Démonstration. On admettra que U étant connexe par arc, les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans U sont l'ensemble vide ou U lui-même (pour un lecteur ayant des notions de topologie, cela signifie simplement qu'un connexe par arc est un connexe). C'est cette propriété que nous allons utiliser dans la preuve. Soit $h = f - g$. Alors, h est analytique et en particulier si h n'est pas nul au voisinage de z_∞, alors h s'écrit (au voisinage de z_∞) $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_\infty)^n = (z - z_\infty)^p(a_p + a_{p+1}(z - z_\infty) + a_{p+2}(z - z_\infty)^2 + \ldots)$ avec $a_p \neq 0$. Et donc h ne s'annule pas sur un voisinage de z_∞ (sauf en z_∞), ce qui est contradictoire avec $h(z_n) = 0$ pour tout n. Donc au voisinage de z_∞, h est nulle. Ceci montre que l'ensemble

$$A = \{a \in U; h = 0 \text{ au voisinage de } a\}$$

est non vide. De plus, A est clairement un ouvert. Montrons maintenant que c'est un fermé, i.e. montrons que si une suite x_n d'éléments de A converge disons vers x dans U alors nécessairement $x \in A$. Or, comme $A \subset K$, la suite x_n est une suite de K convergente vers x, le raisonnement précédent montre alors que h est nulle au voisinage de x et x appartient donc bien à A. Ainsi, A est un ensemble non vide, ouvert et fermé dans U connexe. Ce qui montre que $A = U$ et par suite, f et g coincident sur l'ouvert U. ■

Exemple 3.B.1 FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE LOI GAUSSIENNE-

Soit à calculer $f(z) = \int e^{zt} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$. Le fait que z soit complexe peut nous gêner parce que ce n'est pas évident d'intégrer des cosinus et des sinus multipliés par des fonctions en exponentielle du carré de t. Par contre, si on sait calculer explicitement f pour z réel et si la fonction obtenue est holomorphe et que f l'est aussi alors on peut prolonger l'égalité sur tout $\mathbb{C}$ et on sait alors calculer f pour tout $z \in \mathbb{C}$! ! ! ! La phrase n'est pas claire ? Voyons cela plus en détail. On cherche à appliquer le Théorème 3.B.1 en posant $U = \mathbb{C}$, qui est bien un ensemble connexe par arc. Donc le i) du Théorème 3.B.1 est vérifié.

Passons au ii). Par dérivation sous le signe intégral, f est dérivable par rapport à z et f est donc holomorphe. Posons $g(z) = e^{z^2/2}$ qui est clairement $\mathbb{C}$ dérivable donc holomorphe lui aussi.

Il reste à montrer iii). Si $z = u \in \mathbb{R}$, alors, l'intégrale devient

$$f(u) = \int e^{ut} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = \left(\int \frac{e^{-\frac{(t-u)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right) e^{u^2/2} = e^{u^2/2} = g(u)$$

(on suppose connu l'égalité $\int \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = 1$). Ainsi en posant $z_n = 1/n$, $z_\infty = 0$, on a bien que $f(z_n) = g(z_n)$ en vertu de l'égalité précédente puisque z_n est réel. Le iii) est prouvé. Par le *principe de prolongement analytique*, f et g coincident sur $\mathbb{C}$. En particulier, $f(\mathbf{i}u) = g(\mathbf{i}u)$, i.e. :

$$\int e^{\mathbf{i}ut} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt = e^{-u^2/2}$$

En probabilité, la quantité $\int e^{\mathbf{i}ut} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt$ est appelée *fonction caractéristique* de la loi *gaussienne*. Cet exemple montre un résultat qui est loin d'être évident a priori : avant de connaître le théorème de prolongement analytique, on pouvait se demander comment calculer f sur l'axe des imaginaires purs ($z = \mathbf{i}u$) alors qu'on ne sait le calculer que sur l'axe des abscisses $z = u \in \mathbb{R}$.

3.C Homotopie

Pour viser une forme plus générale du théorème de Cauchy, on va montrer que l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ d'une fonction holomorphe f ne varie pas lorsqu'on "déforme continûment" le lacet orienté en un autre en "restant dans le domaine d'holomorphie de f". Il faut bien sûr commencer par préciser cette notion intuitive de déformation.

3.C.1 Homotopie des lacets orientés

Définition 3.C.1 Etant donnés deux lacets γ_0 et γ_1 de classe $\mathcal{C}^1$-par morceaux d'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$, (chemins indexés sur $[0,1]$ pour simplifier), on dit qu'une application $(s,t) \mapsto \Gamma_s(t)$ définie pour $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ est *une homotopie de* γ_0 *sur* γ_1 *dans* Ω si :

i) $(s,t) \mapsto \Gamma_s(t)$ est continue (des deux variables) et à valeurs dans Ω.

ii) $\forall s \in [0,1]$, Γ_s est un lacet.

iii) $\Gamma_0 = \gamma_0$ et $\Gamma_1 = \gamma_1$. (►CONDITIONS AUX BORDS)

On dit alors que γ_0 est Ω-*homotope* à γ_1 (par Γ).

En trois mots, Γ est continue, Γ_s est un lacet pour tout s et les lacets terminaux sont γ_0 et γ_1.

Définition 3.C.2 i) On dit qu'un lacet orienté γ est Ω-*homotope à zéro* si $\exists a \in \Omega$ tel que γ est Ω-homotope à γ_a, où γ_a désigne le lacet constant d'image $\{a\}$.

ii) On dit que Ω *est simplement connexe* s'il est connexe par arc non vide et tout lacet orienté de Ω est Ω-homotope à zéro.

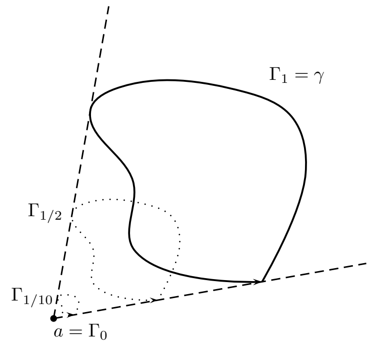


FIGURE 3.5 – *Exemple d'homotopie à* 0. Ici $a = 0$ et $\Gamma_s(t) = s\gamma(t)$. Le lacet γ se réduit continûment vers $a = 0$ par l'application Γ.

La notion de simplement connexe correspond à la notion intuitive d'ensemble sans trou, c'est à dire que tout lacet dessiné sur l'ensemble peut se réduire continûment à un point de l'ensemble. Par contre, un lacet qui entoure un "trou", ne peut se réduire en un point de l'ensemble puisqu'il va se réduire petit à petit autour du trou et le "trou" par définition n'appartient pas à l'ensemble...

3.C.2 Théorème de Cauchy homotopiques

Théorème 3.C.3. DE CAUCHY HOMOTOPIQUE-

$$(f \in \mathcal{H}(\Omega), \gamma_0 \textit{ et } \gamma_1 \textit{ lacets orientés de } \Omega, \ \Omega\textit{-homotopes}) \Rightarrow \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

et en particulier :

$$(f \in \mathcal{H}(\Omega), \gamma \textit{ lacet orienté de } \Omega, \ \Omega\textit{-homotope à zéro}) \Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le deuxième résultat du théorème découle clairement du premier. Si en effet, γ est Ω-homotope à 0, alors il est Ω-homotope au chemin constant $t \mapsto \gamma_a(t) = a$. La fonction γ_a est donc de dérivée nulle ce qui montre bien que $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_a} f(z)\mathrm{d}z = \int f \circ \gamma_a(t) \times \underbrace{\gamma_a'(t)}_{=0} \mathrm{d}t = 0$. Prouvons maintenant la première partie du théorème. Nous nous contenterons de montrer le résultat pour Γ de classe $\mathcal{C}^2$, la démonstration générale dépassant le cadre de ce cours. Nous allons donc prouver que

$$\int_{\Gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z.$$

On va prouver plus précisément que la fonction g définie par

$$\forall t \in [0,1], \quad g(t) = \int_{\Gamma_t} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(\Gamma_t(s)) \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial s} ds$$

est constante. Ce qui achèvera la preuve. Pour cela, montrons tout simplement que $g'(t) = 0$ pour tout $t \in]0,1[$. Ce n'est pas sans rappeler la preuve du théorème de Cauchy 3.1.5 (avec la fonction $g(\alpha)$) et les arguments sont effectivement identiques : on fait une dérivation de g sous le signe intégral et on se rend compte que l'expression obtenue sous l'intégrale devient explicitement intégrable ! !

$$\begin{aligned} g'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\Gamma_t(s)) \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial s}\right] ds = \int_0^1 \left[f'(\Gamma_t(s)) \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial t} \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial s} + f(\Gamma_t(s)) \frac{\partial^2 \Gamma_t(s)}{\partial t \partial s}\right] ds \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left[f(\Gamma_t(s)) \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial t}\right] ds = \left[f(\Gamma_t(s)) \frac{\partial \Gamma_t(s)}{\partial t}\right]_{s=0}^{s=1} = 0 \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de ce que, Γ_t étant un lacet, $\Gamma_t(0) = \Gamma_t(1)$ pour tout t et par dérivation, on a aussi $\frac{\partial\Gamma_t(0)}{\partial t} = \frac{\partial\Gamma_t(1)}{\partial t}$. La preuve est achevée.

■

Le théorème de Cauchy homotopique a des conséquences pratiques intéressantes pour le calcul des intégrales car il permet de les calculer sur certains lacets judicieusement choisis parce que faciles à intégrer. Une autre conséquence de ce théorème concerne l'existence de primitive. Ce que nous voyons maintenant.

Théorème 3.C.4. *Si f est holomorphe sur Ω ouvert simplement connexe. Alors f admet une primitive sur cet ouvert i.e. il existe F holomorphe sur Ω tel que $F' = f$.*

Démonstration. Fixons z_0 dans Ω. Pour tout z de Ω, il existe γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant z_0 à z. Montrons que

$$F(z) = \int_\gamma f(\omega)d\omega$$

est bien défini, c'est à dire que $F(z)$ ne dépend pas du chemin γ joignant z_0 à z. Pour cela, considérons γ' un autre chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant z_0 à z alors, comme $\gamma\gamma'^\star$ est un lacet et est donc Ω-homotope à 0 et par suite, le Théorème de Cauchy homotopique donne

$$\int_{\gamma\gamma'^\star} f(\omega)d\omega = \int_\gamma f(\omega)d\omega - \int_{\gamma'} f(\omega)d\omega = 0$$

Ainsi la fonction $F(z)$ est bien définie. De même, on montre que $F(z) - F(z')$ s'écrit comme $\int_\gamma f(\omega)d\omega$ où γ est un chemin de Ω *quelconque* $\mathcal{C}^1$ par morceaux joignant z' à z. Nous allons maintenant choisir un chemin particulier. Le point z étant fixé, choisissons h suffisamment petit pour que $B(z,h) \subset \Omega$ et choisissons le chemin $\gamma(t) = z + th$ qui joint z à $z + h$,

$$F(z+h) - F(z) = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 f(z+th)h\mathrm{d}t$$

De là, on tire

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z))}{h} - f(z)\right| = \left|\int_0^1 [f(z+th) - f(z)]\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{z' \in B(z,h)} |f(z') - f(z)|$$

qui converge bien vers 0 lorsque h tend vers 0. La preuve est achevée. ■

3.D Quelques inégalités utiles

L'inégalité $\left|\int f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int |f(t)|\mathrm{d}t$ qui est vraie lorsque f est à valeurs réelles est aussi valable lorsque f est à valeurs complexes. Ce que nous voyons maintenant.

Lemme 3.D.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable à valeurs complexes, intégrable ($\int |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$). Alors*

$$\left|\int f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int |f(t)|\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Posons $P(t) = \mathcal{R}\mathrm{e}\ f(t)$ et $Q(t) = \mathcal{I}\mathrm{m}\ f(t)$. Notons que

$$P^2 = (\sqrt{P^2+Q^2} - Q)(\sqrt{P^2+Q^2} + Q)$$

si bien que $|P| = gh$ avec $\begin{cases} g = (\sqrt{P^2+Q^2} - Q)^{1/2} \\ h = (\sqrt{P^2+Q^2} + Q)^{1/2} \end{cases}$. Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\int P(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int |P(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int g^2(t)\mathrm{d}t \times \int h^2(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int [\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)} - Q(t)]\mathrm{d}t \times \int [\sqrt{P^2(t)+Q^2(t)} + Q(t)]\mathrm{d}t = \left(\int \sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\mathrm{d}t\right)^2 - \left(\int Q(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

Finalement, cette inégalité peut se réécrire

$$\left|\int f(t)\mathrm{d}t\right|^2 = \left|\int P(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int Q(t)\mathrm{d}t\right|^2 = \left(\int P(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int Q(t)\mathrm{d}t\right)^2$$
$$\leq \left(\int \sqrt{P^2(t)+Q^2(t)}\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

Lemme 3.D.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz- *Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs complexes dans $\mathsf{L}_2 = \{h; \int |h^2(t)|\mathrm{d}t < \infty\}$. Alors*

$$\left|\int f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int |f|^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int |g|^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Démonstration. Par le lemme précédent et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions à valeurs réelles,

$$\left|\int f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int |f|^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int |g|^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

■

Chapitre 4

Séries de Fourier et espaces de Hilbert

Sommaire

Mots clés 4.1 Espace de Banach, espace de Hilbert, projection sur un convexe fermé, espace total, décomposition sur une base, espaces L_1, L_2, L_∞, convergence faible.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le théorème de Cauchy assure que si f est holomorphe, alors pour tout $z \in B(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})\mathrm{e}^{-\mathbf{i}nt}dt.$$

Plaçons nous dans la situation particulière où $z_0 = 0$ et $r = 1$. Posons $g(t) = f(\mathrm{e}^{\mathbf{i}t})$, g est alors périodique et la décomposition précédente s'écrit :

$$\boxed{g(t) = \sum_{n\geq 0} c_n \mathrm{e}^{\mathbf{i}nt} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}nt}dt}$$

Ce qui est exactement la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique. C'est le résultat phare de ce chapitre mais nous allons le voir sous hypothèses plus générales que celles qu'on aurait avec $g(t) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ où f est holomorphe. Pour bien comprendre d'où vient la décomposition en série de Fourier, nous allons nous placer dans un cadre plus général et voir **la décomposition dans des espaces de Hilbert**, espaces où il sera agréable de faire des projections. La notion de projection peut être vue comme une sorte de simplification, i.e. plutôt que de travailler sur une fonction f qui peut être extrêmement compliquée, on travaille avec une combinaison linéaire de fonctions dont les propriétés sont bien connues (comme par exemple les fonctions $e^{-\mathbf{i}nt}$ mais on peut bien sûr envisager d'autres fonctions !), cette décomposition étant choisie pour être la plus "proche" possible de la fonction d'intérêt dans un sens à définir. La projection joue un rôle fondamental dans les applications. En séries temporelles par exemple, faire une prévision à un instant t donné, revient à considérer une fonction appartenant au futur $(t+h)$ et à le projeter sur nos connaissances présentes (i.e. sur des variables dont l'indice de temps s est inférieur à l'instant courant t).

4.1 Définition et premières propriétés

4.1.1 Espace de Banach

Commençons par rappeler la définition d'un espace de Banach.

Définition 4.1.1 On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet (complet signifie que toute suite de Cauchy converge).

Pour vérifier qu'un espace est de Banach, il peut être incommode de vérifier directement que toute suite de Cauchy converge. En fait, nous disposons d'une autre caractérisation des espaces de Banach qui s'exprime en terme de séries normalement convergentes.

Proposition 4.1.2. CARACTERISATION DES ESPACES DE BANACH- *Un espace est de Banach ssi c'est un espace vectoriel normé où toute série normalement convergente est convergente.*

4.1.2 Espace de Hilbert

Définition 4.1.3 On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qu'on notera ici $(\cdot,\cdot)$ et complet pour la norme associée (notée ici $\|\cdot\|$ avec pour définition, $\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(u,u)}$).

Du fait de la complétude, toute suite normalement convergente est convergente, i.e. $\sum_n \|u_n\|$ converge implique que $\sum_n u_n$ converge. Néanmoins, dans un espace de Hilbert, on peut obtenir le résultat plus spécifique suivant où la condition portant sur les normes est moins forte.

Théorème 4.1.4. *Soit H un espace de Hilbert et (u_n) une suite d'éléments de H deux à deux* orthogonaux. *Pour que la série $\sum_0^\infty u_n$ soit convergente, il faut et il suffit que la série $\sum_0^\infty \|u_n\|^2$ soit convergente. On a alors*

$$\sum_0^\infty \|u_n\|^2 = \|\sum_0^\infty u_n\|^2$$

On peut comprendre l'égalité apparaissant dans le Théorème 4.1.4 comme une sorte de *Formule de Pythagore généralisée* (on a une suite d'éléments (u_n) au lieu d'en avoir seulement deux comme dans la formule de Pythagore).

DÉMONSTRATION. La condition est nécessaire. En effet, posons S_N la somme partielle $S_N = \sum_0^N u_n$. Par Pythagore,

$$\sum_0^N \|u_n\|^2 = \|S_N\|^2.$$

En appelant $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum u_n$ la somme de la série, le membre de droite converge vers $\|S\|^2$ par continuité de la norme, ce qui entraîne la convergence de la série numérique $\sum_0^\infty \|u_n\|^2$.

Réciproquement, si cette série converge, $\|S_{N+P} - S_N\|^2 = \sum_{N+1}^{N+P} \|u_n\|^2 \leq \sum_{N+1}^{\infty} \|u_n\|^2$. Le second membre tend vers 0 avec N, ce qui assure que la suite S_N est de Cauchy dans H et est donc convergente. ■
A terme dans ce paragraphe, nous allons parler de décomposition dans une base, ce qui correspond, on va le voir, à des projections sur des espaces de plus en plus grands. Mais avant cela, on va simplement faire une projection orthogonale sur un sous espace fermé.

Théorème 4.1.5. SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL- *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous espace fermé de H. Posons $F^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in F; \forall f \in F, (f|g) = 0\}$. L'ensemble $F^\perp$ est un sous espace fermé de H appelé supplémentaire orthogonal de F. Tout élément $h \in H$ se décompose de manière unique sous la forme*

$$h = f + g \quad f \in F \quad g \in F^\perp \tag{4.1}$$

En outre, les éléments de f et g de la décomposition sont les projections de f sur F et $F^\perp$ respectivement.

DÉMONSTRATION. Soit en effet $h \in \Gamma$ et notons f sa projection sur F. Pour tout élément $f' \in F$ et tout scalaire λ, le point $f + \lambda f'$ appartient à F et on a donc d'après le théorème 4.A.1-i), $\mathcal{R}\text{e}\ (h - f|\lambda f') \leq 0$. Il en résulte que l'on a $(h - f|f') = 0$ pour tout $f' \in F$ et que $g = h - f \in F^\perp$. Ce qui prouve l'existence de la décomposition.

S'il existait une autre décomposition $h = f_1 + g_1$ du même type, le vecteur $f - f_1 = g_1 - g$ appartiendrait à F et $F^\perp$, il serait orthogonal à lui même et donc nul. ■

S'IL NE FALLAIT RETENIR QU'UNE CHOSE SUR LES PROJECTIONS- On a vu dans cette preuve que si F est un sous espace fermé, la projection d'un point quelconque h sur F est l'unique point $\underline{f \in F}$ tel que

$$(h - f, g) = 0 \quad \text{pour tout } g \in F.$$

Cette condition est **souvent utilisée dans la pratique** pour caractériser une projection sur un sous espace fermé.

En dimension finie, on peut toujours trouver une base orthonormée. En dimension infinie, ce n'est malheureusement plus le cas et nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 4.1.6 Un sous ensemble A d'un espace de Hilbert H est dit *total* ssi le sous espace vectoriel engendré par les éléments de A, noté $\text{Vect } A$ est dense dans H.

Définition 4.1.7 Soit H un espace de Hilbert *séparable* (i.e. un espace de Hilbert admettant une famille dénombrable dense). On appelle *base hilbertienne* ou *base orthonormale* de H une suite finie ou infinie (e_j), $j = 1, 2, \ldots$ qui constitue un système total dans H et qui vérifie les relations d'orthonormalité : $(e_j|e_k) = \mathbf{1}(j = k)$.

Cette définition n'implique nullement que les e_j constituent une base algébrique de H : on demande que l'espace des combinaisons linéaires des e_j soit partout dense au lieu de demander qu'il coincide avec H. En fait, un espace de Hilbert de dimension infinie n'admet jamais de base algébrique dénombrable...

Théorème 4.1.8. *Dans tout espace de Hilbert séparable, il existe des bases hilbertiennes.*

DÉMONSTRATION. A partir d'un ensemble total fini ou dénombrable, que nous numéroterons $a_1, a_2, \ldots$, nous allons construire une base hilbertienne par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. On commence par supprimer de la suite, tout vecteur qui est combinaison linéaire des précédents. On obtient ainsi une suite b_j qui est telle que l'espace vectoriel E_n engendré par $b_1, \ldots, b_n$ soit exactement la réunion des E_n et l'hypothèse assure qu'il est partout dense.

Posons $e_1 = b_1/\|b_1\|$ et montrons par récurrence que l'on peut construire une suite orthonormale e_j telle que pour tout n, les $e_1, \ldots, e_n$ forment une base de E_n. L'espace des combinaisons linéaires des e_j sera alors également la réunion des E_n et le système des e_j sera bien total.

Les e_j étant supposés construits jusqu'au rang n, posons

$$f_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (b_{n+1}|e_j) e_j.$$

Il est immédiat que ce vecteur est orthogonal aux e_j pour $j = 1, \dots, n$. D'autre part, il appartient à E_{n+1} et pas à E_n, ce qui prouve que $(e_1, \dots, e_n, f_{n+1})$ est une base algébrique de F_{n+1}. Il suffit de poser $e_{n+1} = f_{n+1}/\|f_{n+1}\|$ pour obtenir une base orthonormale ce qui achève la récurrence et la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure de **décomposer tout élément d'un espace de Hilbert séparable sur une base hilbertienne**, c'est le théorème phare de ce chapitre, celui sur lequel s'appuie la décomposition en série de Fourier :

Théorème 4.1.9. DÉCOMPOSITION SUR UNE BASE- *Soit H un espace de Hilbert séparable, et (e_j), $j = 1, 2, \dots$ une base hilbertienne de H.*

i) Tout élément $f \in H$ peut se décomposer de façon unique sous forme d'une série convergente dans H

$$f = \sum_j c_j(f) e_j, \quad c_j(f) \in \mathbb{C}.$$

Les composantes $c_j(f)$ sont données par

$$c_j(f) = (f|e_j), \tag{4.2}$$

et vérifient

$$\|f\|^2 = \sum_j |c_j(f)|^2 \qquad (\blacktriangleright\text{BESSEL-PARSEVAL}) \tag{4.3}$$

ii) Réciproquement, étant donné des scalaires γ_j vérifiant $\sum_j |\gamma_j|^2 < \infty$, la série $\sum_j \gamma_j e_j$ converge dans H et sa somme f vérifie $c_j(f) = \gamma_j$ pour tout j.

DÉMONSTRATION. Dans le ii) la convergence de la série est un cas particulier du Théorème 4.1.4, les $\gamma_i e_i$ étant orthogonaux de norme $|\gamma_i|$.

On obtient facilement le reste du point ii) et du même coup, l'unicité de la décomposition et la nécessité des formules (4.2) : si la série $\sum \gamma_i e_i$ converge vers f, par continuité du produit scalaire, on a $(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i | e_k) \to (f|e_k)$ et le membre de gauche est égal à γ_k dès que $n \geq k$.

Soit enfin $f \in H$, posons $c_j(f) = (f|e_j)$ et $f_N = \sum_{j=1}^N c_j(f) e_j$. On a

$$(f|f_N) = \sum_{j=1}^N \overline{c_j(f)}(f|e_j) = \sum_{j=1}^N |c_j(f)|^2.$$

Le membre de droite est égal d'après le théorème de Pythagore à $\|f_N\|^2$ et on a donc $\|f_N\|^2 = (f|f_N) \leq \|f\|\|f_n\|$. Cela prouve que $\|f_N\|^2$ est majoré pour tout N par $\|f\|^2$ et donc que la série $\sum |c_j(f)|^2$ est convergente. Une nouvelle application du Théorème 4.1.4 assure que la série $\sum c_j(f) e_j$ converge vers un élément $g \in H$. Pour tout j, on a $(g - f|e_j) = c_j(f) - c_j(f) = 0$ et l'élément $g - f$ qui est orthogonal à un système total est nécessairement nul. Ce qui achève la démonstration. ■

4.2 Espaces fonctionnels classiques

4.2.1 Support d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}$. Le support de f notée supp f est l'adhérence de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) \neq 0$:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

Le support de f est donc un ensemble fermé en dehors duquel f est nulle. En outre, c'est le plus petit ayant cette propriété.

Exemple 4.2.1 Le support de la fonction $\mathbf{1}_{[0,1[}$ est $[0, 1]$. De même, le support de la fonction caractéristique des rationnels $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{R}$.

4.2.2 Espaces de fonctions bornées

Si $\mathbf{X}$ est un ensemble, l'ensemble $\mathcal{F}_b(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ des applications bornées de $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{C}$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbf{X}} |f(x)|$.

De même pour l'espace $C_b(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ des fonctions continues bornées à valeurs dans $\mathbb{C}$.

4.2.3 L'espace L_1

Si on considère l'espace, provisoirement appelé $\mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, on peut se demander si on peut le munir de la norme

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \int |f(t)|dt$$

La réponse est "non". En effet, si f et g sont deux fonctions intégrables, égales presque partout alors $\|f-g\| = 0$ bien que $f \neq g$; cela signifie que $f \mapsto \|f\|$ n'est pas une norme. Pour pallier ce problème, on *identifie* les fonctions égales presque partout. L'ensemble des fonctions presque partout égales à f est appelée *classe d'équivalence* de f. On note alors $\mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ ou bien simplement L_1 l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions intégrables. Ainsi lorsqu'on parle d'une fonction $f \in \mathsf{L}_1$, on parle en fait de n'importe laquelle des fonctions d'une même classe d'équivalence. Par exemple la fonction nulle et la fonction qui vaut 1 sur les rationnels et qui est nulle partout ailleurs sont dans la même classe d'équivalence que l'on note 0. On dira alors pour simplifier qu'elles sont toutes deux "égales à la fonction nulle".

Dans l'espace L_1, la fonction $f \mapsto \int |f(x)|dx$ est bien une norme ce que nous voyons dans le théorème suivant :

Théorème et Définition 4.2.1 L'espace $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des classes de fonctions (à valeurs réelles) sommables pour la relation d'équivalence $f = g, \quad p.p.$

i) Fisher-Riesz- Muni de la norme

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \tag{4.4}$$

L_1 est un espace de Banach.

ii) L'espace $C_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact est partout dense dans $L_1(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Le membre de droite de l'Equation (4.4) a bien un sens qui ne dépend que de l'élément $f \in \mathsf{L}_1$. Si $\|f\|_1 = 0$, un représentant quelconque de f doit être nul presque partout ce qui signifie précisément que $f = 0$. Montrons la complétude, d'après la proposition 4.1.2, il suffit de montrer que toute série normalement convergente pour la norme associée L_1 est convergente. On se donne une série $\sum_n u_n$ normalement convergente. Posons $h(x) = \sum_{n=0}^\infty |u_n(x)|$ alors la série $\sum |u_n(x)|$ étant une série à termes positifs, on a

$$\int h(x)dx = \int \sum_n |u_n(x)|dx = \sum_n \int |u_n(x)|dx = \sum_n \|u_n\|_1 < \infty$$

Donc la fonction h est intégrable donc elle est finie presque partout, donc la série numérique $\sum_n u_n(x)$ est convergente presque partout par rapport à x. On pose

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x) \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x).$$

On a ainsi

$$\begin{cases} \lim_N |S_N(x) - S(x)| = 0 & \text{presque partout pour } x \\ |S_N(x) - S(x)| = |\sum_{n>N} u_n(x)| \leq h(x) & \text{qui est une fonction intégrable} \end{cases}$$

Alors par convergence dominée :

$$\int |S_N(x) - S(x)|dx \to 0$$

ce qui précisément signifie que la série de terme général u_n converge vers S dans L_1 ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 4.2.2. *Si une suite f_j converge vers f dans L_1, on peut en extraire une suite qui converge presque partout vers f.*

On peut en effet extraire une sous suite de f_j qu'on notera g_j telle que $\|g_j - f\|_1 \leq 2^{-j}$ ce qui montre que

$$\|g_{k+1} - g_k\|_1 \leq \|g_{k+1} - f\|_1 + \|f - g_k\|_1 \leq 2^{-k-1} + 2^{-k} = 3(2^{-k-1})$$

la série $\sum g_{k+1} - g_k$ est donc normalement convergente et la démonstration précédente montre qu'elle converge presque partout.

4.2.4 L'espace L_2

Théorème et Définition 4.2.3 L'espace $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des classes de fonctions (à valeurs réelles) de carré sommable pour la relation d'équivalence $f = g$, *p.p.*

i) Muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

L_2 est un espace de Hilbert séparable.

ii) L'espace $C_0(\mathbb{R}^n)$ des fonctions continues à support compact est partout dense dans $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Pour montrer la complétude, nous reprenons pour L_2 la même démarche que pour L_1. Nous allons montrer que toute série normalement convergente dans L_2 est convergente dans L_2. Soit donc une série $\sum_n u_n$ normalement convergente pour la norme $\|\cdot\|_2$. En posant $h(x) = \sum_0^\infty |u_n(x)|$, on a par le théorème de convergence monotone et l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\int h(x)^2 dx = \int \lim_N \left(\sum_0^N |u_n(x)|\right)^2 dx = \lim_N \int \left(\sum_0^N |u_n(x)|\right)^2 dx = \lim_N \left(\left\|\sum_0^N |u_n|\right\|_2\right)^2 \\ \leq \lim_N \left(\sum_0^N \|u_n\|_2\right)^2 = \left(\sum_0^\infty \|u_n\|_2\right)^2 < \infty.\end{aligned}$$

Donc h^2 est intégrable ce qui implique que h est finie presque partout. En tout point x où h est finie, la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente, notons S sa limite et S_N la somme partielle associée, i.e. on pose

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^N u_n(x) \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x).$$

On a ainsi

$$\begin{cases} \lim_N |S_N(x) - S(x)|^2 = 0 \quad \text{presque partout pour } x \\ |S_N(x) - S(x)|^2 = |\sum_{n>N} u_n(x)|^2 \leq h(x)^2 \quad \text{qui est une fonction intégrable} \end{cases}$$

Alors par convergence dominée :

$$\int |S_N(x) - S(x)|^2 dx \to 0$$

ce qui précisément signifie que la série $\sum_n u_n$ converge vers S dans L_2 ce qui achève la preuve. ■

4.2.5 L'espace L_∞

On va travailler maintenant sur la classe des fonctions bornées. Le problème qui se pose immédiatement est que si f est une fonction bornée et $g = f$, $\quad p.p.$ alors g n'est pas nécessairement bornée ! Par exemple, f est la fonction nulle et $g(x) = x \times \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ alors $f = g$ presque partout mais g n'est pas bornée. Nous aurons besoin d'une définition de la bornitude qui soit valable quelle que soit le représentant de la classe choisie.

Définition 4.2.4 Le *sup-essentiel* d'une fonction f est défini par le réel

$$\sup\text{ess}\, f \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{a; \int_{\{f(x)>a\}} dx = 0\right\}.$$

En d'autres termes, le sup-essentiel d'une fonction f est le plus petit a pour lequel l'ensemble $\{x; f(x) > a\}$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

En reprenant l'exemple précédent, on se rend compte maintenant que $\{x; g(x) > 0\} = \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ qui est donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue. Et finalement $\sup\text{ess}\, g = 0$ (alors que $\sup g = \infty$).

Pour alléger les notations, on écrira souvent sup au lieu de sup ess (dans les chapitres suivants).

Théorème et Définition 4.2.5 L'espace $\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des classes de fonctions essentiellement bornées pour la relation d'équivalence $f = g$, $p.p.$ Muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\text{ess}\, |f|,$$

L_∞ est un espace de Banach.

Nous ne prouverons pas la complétude de L_∞, nous nous contenterons de donner l'idée de la preuve. Il suffit en fait de prendre une suite de Cauchy f_j pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On montre alors que la suite numérique $f_j(x)$ est de Cauchy presque partout pour x. Enfin, on utilise la complétude de $\mathbb{R}$ pour assurer l'existence d'une limite pour $f_j(x)$ qu'on notera $f(x)$ presque partout pour x. Enfin, on montre que la classe d'équivalence de cette fonction f est bien la limite des fonctions f_j pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

4.2.6 Espace $\mathsf{L}_\infty(A)$

Nous terminons enfin par deux propositions s'adressant à des fonctions f de A dans $\mathbb{R}$ telle que A est de mesure finie pour ν. La démonstration de ces propositions est laissée en exercice.

Proposition 4.2.6. *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\nu(A) < \infty$. On a alors*

$$\mathsf{L}_\infty(A) \subset L_2(A) \subset L_1(A)$$

Proposition 4.2.7. *Pour tout sous-ensemble A (de mesure > 0) de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\nu(A) < \infty$, on a*

$$\mathsf{L}_\infty(A) \cap L_1(A) \subset L_2(A)$$

4.3 Séries de Fourier

On se donne dans cette section un nombre $T > 0$ et on pose $\boxed{\omega = 2\pi/T}$.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(t - T) = f(t)$, p.p., il en est de même de toute fonction presque partout égale à f. On dit qu'une classe de fonctions est T-périodique si l'un quelconque de ses réprésentants vérifie la propriété ci-dessus.

On définit l'espace L^2_T comme étant l'espace des (classes de) fonctions T-périodiques localement de carré sommable, i.e. $f \in L^T_2$ ssi f est T-périodique et pour tout compact K, $\int_K |f(t)|^2 dt < \infty$. Nous munirons l'espace L^2_T du produit scalaire suivant

$$(f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}dt.$$

C'est un espace de Hilbert.

Nous admettrons les deux théorèmes suivant.

Théorème 4.3.1. *Les fonctions* $e_p(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{i}p\omega t}, p \in \mathbb{Z}$ *forment une base hilbertienne de* L^2_T.

Théorème 4.3.2. *i) Tout élément* $f \in L^2_T$ *peut se décomposer de façon unique sous la forme*

$$f = \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_p(f)\mathrm{e}^{\mathbf{i}p\omega t},$$

la série convergeant en moyenne quadratique (c'est-à-dire pour la norme de L^2_T*). Les composantes* $c_p(f)$ *sont données par*

$$c_p(f) = (f|e_p) = \int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}p\omega t}dt/T,$$

et vérifient

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt/T = \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p(f)|^2 \qquad (\blacktriangleright\text{BESSEL PARSEVAL}).$$

ii) Réciproquement, étant donné des scalaires γ_p *vérifiant* $\sum_{p\in\mathbb{Z}} |\gamma_p|^2 < \infty$, *la série* $\sum \gamma_p \mathrm{e}^{\mathbf{i}p\omega t}$ *converge en moyenne quadratique vers une fonction* $f \in L^2_T$ *telle que l'on ait* $c_p(f) = \gamma_p$.

DÉMONSTRATION. Se déduit aisément du Théorème 4.1.9. ■

Si f est réel, plutôt que d'utiliser $c_p(f)$, on utilise aussi souvent $a_p(f)$ et $b_p(f)$ dont la définition est donnée ci après :

$p = 0$	$a_0(f) = T^{-1}\int_0^T f(t)dt$	$b_0(f) = 0$
$p > 0$	$a_p(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(p\omega t)dt$	$b_p(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(p\omega t)dt$

Ce théorème caractérise complètement les fonctions de carré sommable en termes de leur série de Fourier. Il ne fournit toutefois que la convergence en moyenne quadratique et ne dit rien sur la convergence ponctuelle.

4.4 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Nous passons maintenant à la convergence ponctuelle des séries de Fourier et nous allons pour cela présenter le théorème de Dirichlet. Soit L^1_T l'espace des classes de fonctions T-périodiques localement intégrables, i.e. $f \in L^T_1$ ssi f est T-périodique et pour tout compact K, $\int_K |f(t)|dt < \infty$. Sans perte de généralité, on va se placer uniquement dans le cas où $T = 1$. On pose alors

$$S_N f(x) = \sum_{|n|\le N} \left(\int_0^1 f(y)\mathrm{e}^{-2n\mathbf{i}\pi y}dy\right)\mathrm{e}^{2n\mathbf{i}\pi x}$$

Théorème 4.4.1 (de Dirichlet). *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est* 1*-périodique et localement intégrable, et si de plus* f *est de classe* C^1 *par morceaux (mais pas nécessairement continue), alors pour tout* x,

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

où $f(x^+)$ *et* $f(x^-)$ *désignent respectivement les limites à droite et à gauche de la fonction* f *en* x.

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$S_N f(x) = \sum_{|n|\le N} \int_0^1 f(y)\mathrm{e}^{2n\mathbf{i}\pi(x-y)}dy = \int_0^1 f(y) \sum_{|n|\le N} \mathrm{e}^{2n\mathbf{i}\pi(x-y)}dy$$

Posons K_N le noyau de Dirichlet défini par $K_N(y) = \sum_{|n|\leq N} e^{2i\pi ny}$. On voit clairement que K_N est paire, 1-périodique et $\int_0^1 K_N(y)dy = 1$, ce qui implique en particulier que

$$\int_0^{1/2} K_N(y)dy = \int_{-1/2}^0 K_N(y)dy = 1/2$$

Nous pouvons alors réécrire $S_N f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x-y)K_N(y)dy$, ce qui implique

$$\begin{aligned} S_N(f) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \int_0^{1/2} (f(x-y)-f(x^-))K_N(y)dy + \int_{-1/2}^0 (f(x-y)-f(x^+))K_N(y)dy \\ &= \int_0^{1/2} \varphi_x(y)K_N(y)dy \end{aligned}$$

où

$$\varphi_x(y) = f(x-y)+f(x+y)-f(x^-)-f(x^+)$$

Sous les hypothèses de l'énoncé sur f, la fonction φ_x est bornée sur $[0,1/2]$ et prolongeable par continuité en 0 (et valant alors 0 en 0). De plus, la fonction prolongée est de classe C^1 sur $[0,u]$ pour $u>0$ suffisamment petit : c'est cette propriété qui va permettre de compenser le problème posé par

$$K_N(y) = \frac{\sin((2N+1)\pi y)}{\sin(\pi y)} \tag{4.5}$$

à savoir que $\lim_{y\to 0, y>0} K_N(y) = 2N+1$ qui, elle même, tend vers l'infini quand $N\to\infty$. On va tout d'abord montrer que pour tout $\varphi \in L^1_T$ et pour tout $u \in]0,1/2]$,

$$\lim_{N\to\infty} \int_u^{1/2} \varphi(y)K_N(y)dy = 0.$$

En effet, pour tout $\varphi \in L^1_T$ et $u \in]0,1/2]$, la fonction $\psi : y \mapsto 1\!\!1_{[u,1/2]}(y)\varphi(y)/\sin(\pi y)$ est le produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable, elle est donc intégrable sur $[0,2]$ (on choisit 2 car c'est la période de $y\mapsto \sin((2N+1)\pi y)$). Il s'agit de montrer que $\int_0^2 \psi(y)\sin((2N+1)\pi y)dy$ tend vers 0 lorsque $N\to\infty$. En prolongeant ψ en une fonction 2-périodique, on a pour $(2N+1)^{-1} < u$,

$$\int_0^2 \psi(y)\sin((2N+1)\pi y)dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (\psi(y)-\psi(y+1/(2N+1)))\sin((2N+1)\pi y)dy$$

d'où

$$\left|\int_0^2 \psi(y)\sin((2N+1)\pi y)dy\right| \leq \frac{1}{2}\int_0^2 |\psi(y)-\psi(y+1/(2N+1))|dy \to_{N\to\infty} 0$$

On applique ce qui précède à $\varphi = \varphi_x$ et il vient

$$\lim_{N\to\infty} \int_u^{1/2} \varphi_x(y)K_N(y)dy = 0\ .$$

Pour montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{1/2} \varphi_x(y)K_N(y)dy = 0\ ,$$

il reste donc seulement à montrer que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{u} \varphi_x(y)K_N(y)dy = 0\ .$$

Or, on a pour $u>0$ assez petit,

$$\int_0^u \varphi_x(y)K_N(y)dy = \int_0^u \left(\int_0^y \varphi_x'(t)dt\right) K_N(y)dy = \int_0^u \left(\int_t^u K_N(y)dy\right)\varphi_x'(t)dt\ .$$

En appliquant le résultat vu plus haut à la fonction caractéristique $1\!\!1_{[t,u]}$ avec $t,u \in]0,1/2]$, $t\leq u$, on sait déjà que

$$\lim_{N\to\infty} \int_t^u K_N(y)dy = 0\ .$$

Cela ne suffit pas pourtant pour appliquer le théorème de convergence dominée car nous avons besoin d'une borne pour $\int_t^u K_N(y)dy$ indépendante de N (et idéalement de t). On reprend l'expression de K_N vu en (4.5). Par intégration par parties, nous obtenons

$$\int_t^u K_N(y)dy = -\int_t^y \frac{\cos((2N+1)\pi y)}{2N+1}\frac{\cos(\pi y)}{\sin^2(\pi y)}dy - \left[\frac{\cos((2N+1)\pi y)}{(2N+1)\pi\sin(\pi y)}\right]_t^u ,$$

d'où, en utilisant l'inégalité $\sin(\pi y) \geq 2y$ pour $0 \leq y \leq 1/2$,

$$\left|\int_t^u K_N(y)dy\right| \leq \frac{1}{4(2N+1)t} + \frac{1}{(2N+1)2\pi t} + \frac{1}{(2N+1)2\pi u}$$

qui est majoré par $1/4 + 1/\pi$ si $t \geq 1/(2N+1)$. Pour conclure, on observe que si $0 < t < 1/(2N+1)$,

$$0 < \int_t^{1/(2N+1)} K_N(y)dy < \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y)dy$$

car $K_N > 0$ sur $]0, 1/(2N+1)]$ et

$$\int_0^{1/(2N+1)} K_N(y)dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{(2N+1)\sin(\pi z/(2N+1))}dz$$

Comme $(2N+1)\sin(\pi z/(2N+1))$ tend vers πz lorsque $N \to \infty$ et que $\sin(\pi z/(2N+1)) \geq 2z/(2N+1)$ pour $z \in [0,1]$ et $N \in \mathbb{N}^*$, (de sorte que $z/(2N+1) \in [0, 1/2]$), on obtient par théorème de convergence dominée

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{1/(2N+1)} K_N(y)dy = \int_0^1 \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}dz$$

On obtient donc bien une majoration de $\int_t^u K_N(y)dy$ indépendante de N et de t, ce qui permet de passer à la limite dans

$$\int_0^u \varphi_x(y)K_N(y)dy = \int_0^u \left(\int_t^u K_N(y)dy\right)\varphi_x'(t)dt ,$$

Comme $\int_t^u K_N(y)dy$ tend vers zéro, on en déduit que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^u \varphi_x(y)K_N(y)dy = 0 .$$

La preuve est achevée.

■

Si f est T-périodique au lieu de 1-périodique, alors la fonction $\tilde{f}(x) = f(Tx)$ est 1-périodique. En appliquant Theorem 4.4.1, on obtient alors la version T-périodique du théorème de Dirichlet : Posons

$f(t) = \sum c_j(f) e^{ij\omega t}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$S_N f(x) = \sum_{|n|\leq N} \left(\frac{\int_0^T f(y)\mathrm{e}^{-2n\mathrm{i}\pi y/T}dy}{T}\right)\mathrm{e}^{2n\mathrm{i}\pi x/T}$$

$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$

Théorème 4.4.2 (de Dirichlet pour les fonctions T-périodiques)**.** *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique et localement intégrable, et si de plus f est de classe C^1 par morceaux (mais pas nécessairement continue), alors pour tout x,*

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right)$$

où $f(x^+)$ et $f(x^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de la fonction f en x.

4.5 Points essentiels du chapitre

a) Projection sur un sous espace fermé, décomposition sur une base, Théorème de Parseval.
b) L'espace L_2 est de Hilbert, L_1 et L_∞ sont de Banach.
c) Les fonctions continues à support compact sont denses dans L_1, L_2.
d) Convergence dans L^2_T des séries de Fourier.
e) Convergence ponctuelle des séries de Fourier.

4.6 Un peu d'histoire

Hilbert (1862-1943). Source : bibmath.

David Hilbert est unanimement reconnu comme la figure emblématique des mathématiques du XXème siècle. Son oeuvre est immense, comparable à celle de Poincaré. Surtout, Hilbert a donné l'impulsion de nombreuses recherches mathématiques du XXème siècle et a créé une école allemande qui domina trente années durant.

Hilbert est né le 23 janvier 1862 à Königsberg, d'une famille bourgeoise. Il fait sa thèse à l'université de la même ville, sous la direction de Lindemann, le mathématicien auquel on doit la première preuve de la transcendance de π. C'est à cette époque qu'il se lie avec Minkowski, qui restera son ami toute sa vie.

Les premiers travaux de Hilbert portent sur la théorie des invariants, qu'il aborde d'une façon radicalement nouvelle. Alors que ses prédécesseurs avaient obtenu des résultats partiels au prix de calculs lourds, il parvient à un résultat général - son fameux Nullstellensatz (en français théorème des zéros de Hilbert) - à l'aide de raisonnements abstraits. Ce sont là, les premières pierres de la géométrie algébrique abstraite, une thématique majeure du XXè s.

C'est en 1895 que Hilbert rejoint l'université de Göttingen, qu'il ne quittera plus malgré de nombreuses propositions. Il fit de cette université le centre nerveux des mathématiques du début du XXè s. Il aura pour élèves Hermann Weyl, ainsi que le champion d'échecs Lasker. Il se consacre alors à faire le point, avec son ami Minkowski, sur la théorie algébrique des nombres, et dans son ouvrage Zahlbericht, il réalise une brillante synthèse d'idées de Kummer, Kronecker, Dedekind, et des ses propres travaux. Il publie aussi Grundlagen der Geometrie, où il inaugure la méthode axiomatique en donnant une formulation rigoureuse de la géométrie euclidienne.

Le 8 août 1900, au Second Congrès International des Mathématiciens réuni à Paris, David Hilbert a profondément changé la face des mathématiques. Et pourtant, ce jour-là, il n'a annoncé aucun théorème nouveau, aucun résultat. Rien de tout cela. Au contraire même, ce jour-là, Hilbert a posé 23 problèmes à la communauté des mathématiciens. Ces problèmes ont été le moteur de nombreuses recherches tout au long du siècle dernier. Dans une conférence restée un morceau d'anthologie (Hermite dira : "On n'entendra plus dans les congrès de conférences pareilles"), Hilbert essaie de deviner le futur d'une science. La plupart des 23 problèmes furent effectivement au coeur de nombreuses recherches depuis lors, même s'il en reste 3 ouverts à l'heure actuelle.

Le nom de Hilbert est cependant connu des étudiants surtout pour ses célèbres espaces de Hilbert, qu'il est amené à introduire vers 1909, au cours de son travail sur des équations intégrales. Ensuite, Hilbert se consacre surtout au développement de l'école de pensée dite formaliste, par opposition à l'école intuitionniste de Poincaré et Brouwer. Les intuitionnistes ne reconnaissaient que les preuves d'existence de nature constructive, et refusaient les méthodes axiomatiques de Hilbert. Si ces mathématiques intuitionnistes gardent un grand intérêt, c'est la pensée axiomatique d'Hilbert qui peu à peu va devenir dominante, jusqu'à son influence sans doute excessive dans l'enseignement des "mathématiques modernes".

La légendaire distraction des mathématiciens ne se dément pas avec Hilbert. On rapporte qu'un jour, les Hilbert recevant des invités à diner, Mme Hilbert demanda à son mari de changer de chemise. Le temps passa, les invités arrivèrent, mais Hilbert ne descendait pas. L'explication ? En enlevant sa chemise, il avait commencé une séquence de gestes qui l'avait amené droit au lit et dans un sommeil profond !

Hilbert décède le 14 février 1943 à Göttingen.

4.A Projection sur un convexe fermé

Le théorème suivant joue un rôle très important : tout comme le théorème du point fixe, il affirme l'existence d'un élément vérifiant une (in)égalité. Il sert notamment à démontrer l'existence de solutions pour des équations ou inéquations fonctionnelles.

Théorème 4.A.1. Projection sur un convexe fermé-

i) Soient H un espace de Hilbert et Γ une partie convexe non vide et fermée de H. Pour tout $f \in H$, il existe un unique point de Γ (appelé projection de f sur Γ*) dont la distance à f soit minimum.*

ii) La projection de f sur Γ est l'unique point $g \in \Gamma$ tel que l'on ait $\mathcal{R}e(f-g|h-g) \leq 0$ pour tout $h \in \Gamma$.

On peut démontrer facilement en développant les carrés scalaires du membre de droite, *l'identité de la médiane*

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2 \tag{4.6}$$

qui nous servira dans le courant de cette preuve.

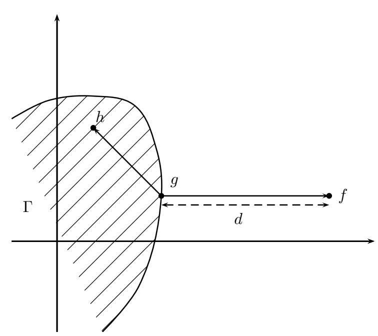


Figure 4.1 – Théorème 4.A.1 : $\mathcal{R}e(f-g|h-g) \leq 0$ pour tout $h \in \Gamma$.

Démonstration. Posons $d = \inf\{\|f-g\|; g \in \Gamma\}$. S'il existait g et g' distincts réalisant ce minimum alors, par convexité leur milieu $\gamma = (g+g')/2$ appartiendrait encore à Γ et d'après (4.6), on aurait $2\|f-\gamma\|^2 = 2d^2 - \|g-g'\|^2/2 < 2d^2$ ce qui est impossible. Cela établit l'unicité de la projection.

Par définition de la borne inférieure, il existe une suite g_i d'éléments de Γ telle que $\|f-g_i\|$ tende vers d. En introduisant γ le milieu de g_i et g_k, on déduit de (4.6)

$$\frac{1}{2}\|g_i-g_k\|^2 = \|f-g_k\|^2 + \|f-g_i\|^2 - 2\|\gamma - f\|^2 \leq \|f-g_k\|^2 + \|f-g_i\|^2 - 2d^2$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque i et k tendent vers l'infini. La suite g_i est donc de Cauchy. L'ensemble Γ étant fermé et donc complet, la suite g_i converge vers un point g de Γ. Par continuité, on a $\|f-g\| = \lim_i \|f-g_i\| = d$ ce qui achève la démonstration du point i). Soit maintenant $h \in \Gamma$. Pour tout $0 < t < 1$, le point $h_t = g + t(h-g)$ appartient aussi à Γ. On a donc

$$\|g-f\|^2 \leq \|h_t - f\|^2 = \|g-f\|^2 + t^2\|h-g\|^2 + 2t\mathcal{R}\mathrm{e}\,(g-f|h-g) \tag{4.7}$$

En faisant tendre t vers 0, on voit que le coefficient de t doit donc être positif ou nul, ce qui établit l'inégalité $\mathcal{R}\mathrm{e}\,(f-g|h-g) \leq 0$. Réciproquement, si un point $g \in \Gamma$ vérifie cette inégalité pour tout $h \in \Gamma$, l'égalité de droite dans Eq. (4.7), pour $t = 1$ montre que la distance de g à f est inférieure à celle de h à f, ce qui caractérise la projection d'après la partie i). ■

4.B Convergence faible

La convergence faible dans un espace de Hilbert se définit comme suit :

Définition 4.B.1 Dans un espace de Hilbert H, on dit qu'une suite u_n converge faiblement vers $u \in H$ si pour tout $v \in H$, $(u_j|v) \to_{j\to\infty} (u|v)$.

Comme attendu, c'est une notion plus "faible" que la classique notion de convergence. Pour bien s'en rendre compte, rappelons nous que dans un espace de Hilbert de dimension infinie, la boule unité n'est jamais compacte, i.e. on montre qu'il existe une suite de points dans la boule unité dont on ne peut extraire aucune sous suite convergente. Ce résultat est bien connu mais qu'en est il maintenant si au lieu de considérer la notion usuelle de convergence, on s'intéresse à la convergence faible ? Et bien, ce n'est plus le cas : de toute suite de points dans la boule unité, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement ! ! Voyons le maintenant plus précisément dans le théorème suivant :

Théorème 4.B.2. *Soit u_j une suite d'éléments d'un espace de Hilbert séparable H vérifiant $\|u_j\| \leq M$. On peut alors en extraire une sous suite v_k qui converge faiblement vers un élément v vérifiant $\|v\| \leq M$.*

Démonstration. Soit e_n une base hilbertienne de H. La suite numérique $(u_j|e_1)$ étant bornée, on peut extraire de u_j une première sous suite qu'on note u_j^1, telle que $(u_j^1|e_1)$ converge vers une limite $\alpha_1 \in \mathbb{C}$. De même, on peut extraire de u_j^1 une sous suite u_j^2 telle que $(u_j^2|e_2)$ converge vers une limite $\alpha_2 \in \mathbb{C}$. On construit ainsi par extraction successive une suite de suites u_j^n et on définit enfin la suite v_k par $v_k = u_k^k$. C'est une suite extraite de la suite u_j et pour tout vecteur de la base hilbertienne, on a $(v_k|e_n) \to \alpha_n$.

Pour N fixé, et pour $k \to \infty$, on a $(v_k|\sum_1^N \alpha_n e_n) \to \sum_1^N |\alpha_n|^2$. Le membre de gauche étant majoré par Cauchy Schwarz par $M\left(\sum_1^N |\alpha_n|^2\right)^{1/2}$, il en résulte que $\sum_1^N |\alpha_n|^2 \leq M^2$ pour tout N et donc que $\sum_1^\infty |\alpha_n|^2 \leq M^2$.

Nous pouvons maintenant poser $v = \sum_n \alpha_n e_n$, on a $\|v\| \leq M$ et il reste à prouver que $v - v_k \to 0$. Donnons nous un élément quelconque $w = \sum w_n e_n$ de H et $\epsilon > 0$. On a pour tout N,

$$(v - v_k|w) = \left(v - v_k \middle| \sum_1^N w_n e_n\right) + \left(v - v_k \middle| \sum_{N+1}^\infty w_n e_n\right)$$

Le second terme est majoré en module par $2M\|\sum_{N+1}^\infty w_n e_n\|$ que l'on peut rendre inférieur à $\epsilon/2$ en choisissant N suffisamment grand. Cet entier N étant fixé, le premier terme du membre de droite tend vers 0 avec k et est $\leq \epsilon/2$ pour k assez grand. On a donc montré que $(v - v_k|w) \to 0$ pour tout $w \in H$, ce qui est le résultat voulu. ∎

On prendra garde au fait que la norme et le produit scalaire ne passent pas à la limite faible. Par exemple, si (e_n) est une base hilbertienne, la suite (e_n) elle-même tend faiblement vers 0 alors que $\|e_n\|$ reste égal à 1.

4.C Critère de Totalité, Théorème de Riesz

Nous donnons d'abord une caractérisation de la notion de totalité à l'aide d'un critère d'orthogonalité.

Corollaire 4.C.1. Critère de totalité- *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$. Pour que A soit total, il faut et il suffit que le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de A soit le vecteur nul.*

Démonstration. Soit F le sous espace vectoriel constitué des combinaisons linéaires des éléments de A et soit $\bar{F}$ son adhérence. Par linéarité et passage à la limite, il est clair qu'un élément $g \in H$ appartient à $\bar{F}^\perp$ si et seulement si il est orthogonal à tous les éléments de A. Si A est total, ce qui signifie $\bar{F} = H$, l'unicité de la décomposition (4.1) impose $\bar{F}^\perp = \{0\}$. Réciproquement, si $\bar{F}^\perp = \{0\}$, l'existence de la décomposition (4.1) implique que $\bar{F} = H$, ce qui achève la preuve. ∎

Théorème 4.C.2. DE RIESZ, IDENTIFICATION DE L'ESPACE ET DE SON DUAL- *Soit H un espace de Hilbert. A tout élément $h \in H$, on peut faire correspondre la forme linéaire continue L_h définie par $L_h(f) = (f|h)$. Réciproquement, étant donné une forme linéaire continue L sur H, il existe un et un seul $h \in H$ tel que l'on ait $L = L_h$.*

DÉMONSTRATION. Pour $f \in H$, on a

$$|L_h(f)| = |(f|h)| \leq \|h\| \|f\|$$

Cela prouve que L_h est continue et que $\|L_h\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \neq 0} \frac{|L_h(f)|}{\|f\|} \leq \|h\|_H$ (en considérant $L_h(h)$ on voit facilement qu'on a en fait l'égalité).

Soit maintenant L une forme linéaire continue non identiquement nulle (c'est à dire différente de L_0). Le sous espace vectoriel $F = L^{-1}\{0\}$ est fermé et distinct de H et $F^\perp$ n'est donc pas réduit à $\{0\}$. Soit g un élément non nul de $F^\perp$. Il n'appartient donc pas à F et le scalaire $\lambda = L(g)$ est non nul. Pour tout $f \in H$, on peut poser

$$f = \frac{L(f)}{L(g)} g + \left[f - \frac{L(f)}{L(g)} g \right] = f_1 + f_2$$

et on remarque que le second terme qui vérifie $L(f_2) = 0$ appartient à F tandis que le premier appartient à $F^\perp$. En faisant le produit scalaire avec g, on obtient

$$(f|g) = \frac{L(f)}{L(g)} \|g\|^2 + 0.$$

Il suffit maintenant de poser $h = \frac{\overline{L(g)}}{\|g\|^2} g$ pour obtenir $L(f) = (f|h)$. Cela montre donc que L est égale à L_h. On obtient facilement l'unicité : si $L_{h_1} = L_{h_2}$, le vecteur $h_1 - h_2$ est orthogonal à tout élément de H et est donc nul. ■

Chapitre 5

Transformation de Fourier des fonctions

Sommaire

Mots clés 5.1 transformée de Fourier, Lemme de Riemann-Lebesgue, transformée de Fourier conjuguée, formules d'inversion, fonctions à décroissance rapide, espace de Schwartz, convolution.

Nous introduisons dans ce chapitre une transformation intégrale appelée "transformation de Fourier" qui généralise au cas des fonctions définies sur l'axe réel $\mathbb{R}$ tout entier l'analyse de Fourier des fonctions périodiques. Les coefficients de Fourier établissaient une correspondance entre les fonctions périodiques et une suite de coefficients (les coefficients de Fourier). Ici, la fonction n'a plus la contrainte de périodicité et on aura alors une correspondance non pas avec *une suite de coefficients* mais avec une véritable *fonction* qu'on appellera transformée de Fourier.

On commence par introduire la transformée de Fourier pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue (éléments de L_1). Un des inconvénients de la transformée de Fourier ainsi définie est qu'elle ne laisse pas L_1 stable. On étendra donc cette définition aux fonctions de carré sommable (éléments de L_2), qui possèdent une interprétation énergétique en physique. L'espace L_2 étant stable, toute fonction carré sommable possèdera une transformée de Fourier de carré sommable.

5.1 Transformée de Fourier

5.1.1 Transformée de Fourier d'une fonction de L_1

Definition et exemples

Définition 5.1.1 Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes d'une variable *réelle*. On appelle *transformée de Fourier* (ou *spectre*) de f, *si elle existe*, la fonction complexe de la variable réelle ν :

$$\tilde{f}(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx \quad \text{pour tout } \nu \in \mathbb{R}$$

On écrira alors symboliquement :

$$\tilde{f} = \mathcal{F}_{[f]} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}(\nu) = \mathcal{F}_{[f(x)]}(\nu)$$

De même, on définira la *transformée de Fourier conjuguée* d'une fonction f par

$$\bar{\mathcal{F}}_{[f]}(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi\nu x}dx$$

La transformée de Fourier n'existe pas toujours. Cela peut signifier que $\tilde{f}$ n'existe pas, ou bien que $\tilde{f}(\nu)$ n'est pas définie pour toutes les valeurs de ν. Une condition suffisante mais non nécessaire pour que $\tilde{f}$ existe est que f soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue (on dit aussi *Lebesgue-intégrable*).

Propriétés élémentaires

Théorème 5.1.2. *Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Alors $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée et $\left\|\tilde{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Théorème 5.1.3. *La fonction transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathsf{L}_1(\mathbb{R}) \to \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R})$ est un opérateur linéaire et continue, i.e. :*

i) pour tous $f, g \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\mathcal{F}_{[\alpha f+\beta g]} = \alpha\mathcal{F}_{[f]} + \beta\mathcal{F}_{[g]} \qquad (\blacktriangleright\text{LINÉARITÉ})$$

ii) Si la suite f_n tend vers 0 au sens L_1, alors la suite $\tilde{f}$ tend vers 0 au sens L_∞, i.e. :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int |f_n(x)|dx = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty}\sup_{\nu\in\mathbb{R}}|\tilde{f}_n(\nu)| = 0\right) \qquad (\blacktriangleright\text{CONTINUITÉ})$$

DÉMONSTRATION. DES THÉORÈMES 5.1.2 ET 5.1.3- On a $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}| \leq |f(x)|$ et on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral pour monter que $\tilde{f}$ est continue. De plus, on a pour tout $\nu \in \mathbb{R}$,

$$|\tilde{f}(\nu)| = \left|\int f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx\right| \leq \int |f(x)|dx = \|f\|_1,$$

ce qui montre que

$$\left\|\tilde{f}\right\|_\infty = \sup_{\nu\in\mathbb{R}}|\tilde{f}(\nu)| \leq \|f\|_1$$

La transformation de Fourier étant clairement linéaire, cela suffit pour prouver sa continuité. ■

Exemple 5.1.1 LA FONCTION PORTE- On introduit la fonction Porte :

$$\Pi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > 1/2, \\ 1 & \text{pour } |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

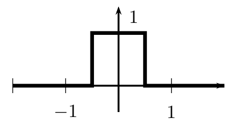


FIGURE 5.1 – La fonction Porte

Alors sa transformée de Fourier est un sinus cardinal :

$$\tilde{\Pi}(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu t} dt = \mathrm{sinc}(\pi\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} & \text{si } \nu \neq 0, \\ 1 & \text{si } \nu = 0. \end{cases}$$

De même si l'on prend la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$, sa transformée de Fourier est

$$\tilde{\mathbf{1}}_{[a,b]} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi(b-a)\nu)}{\pi\nu} \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\pi(a+b)\nu} & \text{si } \nu \neq 0, \\ b-a & \text{si } \nu = 0. \end{cases}$$

Exemple 5.1.2 A partir de l'exemple 3.B.1 dans le Chapitre 3 on peut montrer que si on pose $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, alors sa transformée de Fourier vaut :

$$\mathcal{F}_{[f]}(\nu) = \int \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\alpha}}$$

Le fait que la transformée de Fourier soit une application continue est crucial. Cela signifie que si l'on a une suite (f_n) de fonctions intégrables qui tend vers $f \in \mathsf{L}_1$ au sens de la norme L_1 à savoir

$$\int |f_n(t) - f(t)| dt \to_{n\to\infty} 0$$

alors on aura convergence au sens de la norme L_∞, c'est à dire *convergence uniforme* de la suite $(\tilde{f}_n)$:

$$\sup_{\nu\in\mathbb{R}} |\tilde{f}_n(\nu) - \tilde{f}(\nu)| \to_{n\to\infty} 0$$

L'exemple de la transformée de la fonction Porte montre que la transformée de Fourier d'une fonction de L_1 n'est elle même pas obligatoirement intégrable au sens de Lebesgue. L'opération "transformée de Fourier" ne nous laisse donc pas dans L_1. En revanche, dans les exemples vus dans Exemples 5.1.1 et 5.1.2, chacune des transformées de Fourier a la propriété de tendre vers 0 en l'infini. Cette propriété est en fait générale comme l'indique le lemme suivant que nous admettrons :

Théorème 5.1.4. LEMME DE RIEMANN-LEBESGUE- *Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable. Alors la fonction $\tilde{f}$ tend vers 0 en l'infini :*

$$\lim_{|\nu|\to\infty} \left|\tilde{f}(\nu)\right| = 0$$

Inversion

Peut-on inverser la transformée de Fourier ? La réponse est oui dans certains cas, et de plus la transformée inverse (ou réciproque) n'est autre que la transformée conjuguée.

Nous venons de voir que si f est dans L_1, sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ ne l'est pas forcément. Par contre dans le cas particulier où $\tilde{f}$ est effectivement intégrable alors on a le résultat d'inversion suivant :

Théorème 5.1.5. INVERSION DANS $\mathsf{L}_1(\mathbb{R})$- *Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$ une fonction intégrable admettant une transformée de fourier $\tilde{f}$ elle-même intégrable ($\tilde{f} \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$). Alors,*

$$\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(x) = f(x) \quad \textit{en tout point } x \textit{ où } f \textit{ est continue}$$

En particulier, si f est de plus continue, alors $\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]} = f$.

DÉMONSTRATION. La démonstration comporte plusieurs étapes. On commence par montrer le résultat suivant :

Lemme 5.1.6. *Soient $f, g \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$. Alors, $\tilde{f} \cdot g$ et $f \cdot \tilde{g}$ sont intégrables et*

$$\int \tilde{f}(t)g(t)dt = \int f(t)\tilde{g}(t)dt$$

DÉMONSTRATION. LEMME 5.1.6- La fonction $\tilde{f}$ étant bornée, et g étant intégrable, $\tilde{f} \cdot g$ est donc intégrable. Par Fubini, on a de plus :

$$\int f(t)\tilde{g}(t)dt = \int f(t)\left(\int g(s)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ts}ds\right)dt = \int g(s)\left(\int f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ts}dt\right)ds = \int \tilde{f}(t)g(t)dt$$

ce qui est l'égalité souhaitée. ■

Introduisons la suite de fonctions h_n définie par $h_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\pi^2 x^2/n^2)$. C'est une suite de gaussiennes de plus en plus "larges" qui converge simplement vers la fonction constante $\mathbf{1}$. Puisque $\tilde{f}$ est intégrable et que

$$|\tilde{f}(x)h_n(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}| \leq |\tilde{f}(x)|$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet d'écrire que

$$\int \tilde{f}(x)h_n(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}dx \to_{n\to\infty} \int \tilde{f}(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}dx = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(t). \tag{5.1}$$

De plus, la transformée de Fourier de $x \mapsto h_n(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}$ est, comme on peut le vérifier par calcul direct, $x \mapsto \tilde{h}_n(x-t)$ et le lemme 5.1.6 permet d'écrire que

$$\int \tilde{f}(x)h_n(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}dx = \int f(x)\tilde{h}_n(x-t)dx. \tag{5.2}$$

On va maintenant prouver que

$$\int f(x)\tilde{h}_n(x-t)dx \to_{n\to\infty} f(t).$$

La démonstration générale avec $f \in \mathsf{L}_1$ étant un peu technique, nous restreindrons à prouver cette limite pour $f \in \mathsf{L}_1$ et *borné*. Par calcul direct, on peut se convaincre que la transformée de Fourier de h_n s'écrit $\tilde{h}_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2} = \sqrt{2}nh(\sqrt{2}nx)$ avec $h(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$. Maintenant si t est un point de continuité de f alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(u) - f(t)| < \epsilon$ dès que $|u - t| < \alpha$. En remarquant que $\int h(u)du = 1$, on a $\int \tilde{h}_n(u)du = 1$ par changement de variable et il vient :

$$\begin{aligned}\left|\int f(x)\tilde{h}_n(x-t)dx - f(t)\right| = |\int (f(x)-f(t))\tilde{h}_n(x-t)dx| &\leq \epsilon + \int_{|x-t|>\alpha} (|f(x)| + |f(t)|)\tilde{h}_n(x-t)dx \\ &\leq \epsilon + 2\sup_t |f(t)| \underbrace{\int_{|u|>\sqrt{2}n\alpha} h(u)du}_{u=\sqrt{2}n(x-t)}\end{aligned}$$

Donc, en prenant n suffisamment grand, le terme à droite de l'inégalité sera inférieur à 2ϵ. Ainsi

$$\int f(x)\tilde{h}_n(x-t)dx \to_{n\to\infty} f(t) \tag{5.3}$$

En combinant (5.1), (5.2) et (5.3) et par identification des limites, on obtient en tous point de continuité de f,

$$\int \tilde{f}(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi xt}dx = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(t) = f(t),$$

ce qui est le résultat voulu. ■

Comme la transformée de Fourier conjuguée d'une fonction intégrable est continue, on en déduit que si f admet une discontinuité alors nécessairement sa transformée de Fourier n'est pas intégrable.

Pour pouvoir utiliser la formule d'inversion donnée par le Théorème 5.1.5, il nous faut non seulement des informations sur f mais également sur $\tilde{f}$ (qui doit être intégrable), ce qui peut se révéler fort peu pratique. Dans la proposition suivante, une connaissance plus précise de f (sans connaissance sur $\tilde{f}$) nous permet d'utiliser la formule d'inversion. Nous admettrons cette proposition.

Proposition 5.1.7. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ et si f, f' et f'' sont toutes intégrables alors $\tilde{f}$ est également intégrable. L'inversion de la transformée de Fourier devient possible et on a*

$$f = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}$$

Extension de la formule d'inversion

Qu'en est il maintenant si on n'a pas d'information sur la dérivée seconde f'' ? Le théorème suivant qui sera aussi admis nous permet de répondre (en partie) à la question :

Théorème 5.1.8. *Soit $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points de discontinuités, telle que $f' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R})$, alors*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \tilde{f}(\nu) \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi\nu x} d\nu = \frac{1}{2}\left[f(x^-) + f(x^+)\right]. \tag{5.4}$$

Par abus, on notera encore cette limite $\bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f}]}(x)$.

En d'autres termes, la formule d'inversion prise au sens d'une limite d'intégrale (appelée *valeur principale*) nous donne la *régularisée* de f.

En particulier, si f est continue et si f et f' sont sommables, alors la formule d'inversion (5.4) redonne bien la fonction originale f.

> Si on nous donne la transformée de Fourier d'une fonction, comment peut-on obtenir la fonction originale ?- Ce sont les formules d'inversion de Fourier. Lorsque $f \in \mathsf{L}_1$, il y a trois résultats que vous pouvez utiliser (Théorème 5.1.5, Proposition 5.1.7 et Théorème 5.1.8). Nous vous conseillons de bien relire les hypothèses de ces théorèmes et comparer leurs conclusions afin de bien les différencier. Lorsque $f \in \mathsf{L}_2$, nous verrons d'autres formules d'inversion dans le paragraphe 5.1.3.

5.1.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Transposition, translation et changement d'échelle

On peut démontrer simplement les résultats élémentaires suivants :

Théorème 5.1.9. *Si f est une fonction intégrable et si $a \in \mathbb{R}$, alors*

$$\mathcal{F}_{[\overline{f(x)}]} = \overline{\tilde{f}(-\nu)}, \qquad \mathcal{F}_{[f(-x)]} = \bar{\mathcal{F}}_{[f(x)]} = \tilde{f}(-\nu),$$
$$\mathcal{F}_{[f(x-a)]} = \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu a}\tilde{f}(\nu), \qquad \mathcal{F}_{[f(x)\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi\nu_0 x}]} = \tilde{f}(\nu - \nu_0)$$

De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$,

$$\mathcal{F}_{[f(ax)]} = \frac{1}{|a|}\tilde{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$$

Corollaire 5.1.10. *Les propriétés suivantes évoluent ainsi lors d'une transformation de Fourier*

f	$\tilde{f}$
paire	*paire*
impaire	*impaire*
réelle	*hermitienne*
imaginaire	*antihermitienne*

où l'on rappelle que g est une fonction $\begin{cases}\text{hermitienne}\\ \text{antihermitienne}\end{cases}$ *ssi pour tout x,* $\begin{cases} g(-x) = \bar{g}(x) \\ g(-x) = -\bar{g}(x)\end{cases}$.

Dérivation

On a la relation très importante suivante entre Transformée de Fourier et dérivation :

Théorème 5.1.11. *Soit f tel que la fonction $x^k f \in \mathsf{L}_1$ pour tout $k = 0, \ldots, n$. Alors, $\tilde{f}$ est $n-$fois dérivable et on a*

$$\mathcal{F}_{[(-2\mathbf{i}\pi x)^k f(x)]}(\nu) = \tilde{f}^{(k)}(\nu) \quad pour\ k = 1, \ldots, n.$$

Inversement, si $f \in \mathsf{L}_1$, si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et si de plus, les dérivées successives $f^{(k)}$ sont intégrables pour tout $k = 1, \ldots, n$ alors on a

$$\mathcal{F}_{\left[f^{(m)}(x)\right]}(\nu) = (2\mathbf{i}\pi\nu)^m \tilde{f}(\nu) \quad pour\ m = 1, \ldots, n.$$

Notamment, on retiendra que

$$\mathcal{F}_{[f'(x)]}(\nu) = 2\mathbf{i}\pi\nu\tilde{f}(\nu) \qquad et \qquad \mathcal{F}_{[-2\mathbf{i}\pi x f(x)]}(\nu) = \frac{d}{d\nu}\tilde{f}(\nu)$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\nu \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée k-ième bornée en module par $|(2\pi x)^k f(x)|$ qui est intégrable. On applique alors le théorème de dérivation sous le signe intégral, qui nous donne :

$$\tilde{f}'(\nu) = \frac{d}{d\nu}\tilde{f}(\nu) = \int \frac{d}{d\nu}\left[f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}\right] dx = \int (-2\mathbf{i}\pi x) f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x} dx$$

puis par une récurrence immédiate, nous obtenons la première formule.

On rappelle que pour toute fonction intégrable φ, on a $\int \varphi(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_R^R \varphi(x)dx$. Puisque f' est intégrable, on a donc en intégrant par parties :

$$\mathcal{F}_{[f']}(\nu) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \underbrace{f'(x)}_{u'}\underbrace{\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}}_{v} dx = \lim_{R\to\infty}\left\{\left[f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R}(2\mathbf{i}\pi\nu)f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx\right\}.$$

Comme f est sommable *ainsi que sa dérivée*, f admet une limite nulle en $\pm\infty$. En effet, il suffit de remarquer que $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(u)du$ qui a une limite quand $x \to \pm\infty$ par intégrabilité de f' puis la limite de $f(x)$ en $\pm\infty$ ne peut être que nulle par intégrabilité de f. La formule précédente nous montre alors, en faisant tendre R vers l'infini que

$$\int f'(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x} dx = \int (2\mathbf{i}\pi\nu) f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x} dx,$$

ce qui montre la deuxième formule du théorème avec $k = 1$. Une récurrence sur k permet alors de conclure.
■ En notant que si f est intégrable et à support borné alors $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable pour tout k, on a alors clairement le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.12. *Si $f \in \mathsf{L}_1$ est une fonction à support borné, alors sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Les formules du Théorème 5.1.11 nous conduisent d'ailleurs à un résultat très important :

Corollaire 5.1.13. *Soit f une fonction et soient $p, q \in \mathbb{N}$. On suppose que la dérivée p-ième de f est dans L_1 et que $x \mapsto x^q f(x)$ est dans L_1. Alors, pout tout $\nu \in \mathbb{R}$,*

$$|\tilde{f}(\nu)| \leq |2\pi\nu|^{-p}\int |f^{(p)}(x)|dx \quad et \quad |\tilde{f}^{(q)}(\nu)| \leq \int |2\pi x|^q |f(x)|dx$$

Ces formules nous fournissent des majorations fortes : par exemple, si f est dérivable 5 fois et si $f^{(5)}$ est sommable, alors $\tilde{f}$ décroît au moins en $1/\nu^5$.

Il existe donc un lien entre la régularité de f et la rapidité de la décroissance de $\tilde{f}$; de même entre la décroissance de f et la régularité de $\tilde{f}$. Nous voyons dans la partie suivante ces différents liens pour des fonctions à *décroissance rapide.*

Fonctions à décroissance rapide

Définition 5.1.14 On dit qu'une fonction f est *à décroissance rapide* ssi pour tout $k \geq 0$,

$$\lim_{|x|\to\infty} \left|x^k f(x)\right| = 0$$

Autrement dit, une fonction à décroissance rapide décroît plus vite que tout polynôme.

Exemple 5.1.3 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ et $x \mapsto x^5(\ln x)\mathrm{e}^{-x}$ sont à décroissance rapide.

Cette notion est utile car si f est à décroissance rapide et si elle est localement sommable, alors $x^k f(x)$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$. Du théorème de dérivation 5.1.11, on déduit :

Théorème 5.1.15. *Si f est une fonction à décroissance rapide, alors sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Toujours en utilisant le théorème de dérivation 5.1.11, on peut montrer (exercice) que :

Théorème 5.1.16. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ est dans L_1 alors $\tilde{f}$ est à décroissance rapide.*

5.1.3 Transformée de Fourier d'une fonction de L_2

Il existe des fonctions qui ne sont pas forcément intégrables mais dont le carré l'est. Ainsi la fonction "sinus cardinal" :

$$x \mapsto \operatorname{sinc}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{x},$$

prolongée par continuité en 0 en posant $\operatorname{sinc}(0) = 1$, appartient à L_2 et non à L_1. Or les fonctions de carré intégrable se rencontrent fréquemment en physique et il est souhaitable d'étendre la définition de la transformée de Fourier à la classe des fonctions de carré intégrable. Pour cela, on introduit l'espace de Schwartz, astuce technique qui nous permettra à terme d'arriver à nos fins.

Espace $\mathcal{S}$

Définition 5.1.17 On appelle *espace de Schwartz* qu'on note $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

Exemple 5.1.4 Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Alors $\tilde{f} \in \mathcal{S}$.

En effet, f est à support borné donc d'après le Corollaire 5.1.12, $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, f est dérivable p fois est $f^{(p)}$ est sommable pour tout $p \in \mathbb{N}$ et le Corollaire 5.1.13 permet alors d'affirmer que $\tilde{f}$ décroît au moins comme $1/\nu^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Donc $\tilde{f} \in \mathcal{S}$.

Le résultat le plus important sur les fonctions de $\mathcal{S}$ est le suivant :

Théorème 5.1.18. *La transformée de Fourier est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$.*

En d'autres termes, si $f \in \mathcal{S}$ alors $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ et si la suite f_n tend vers 0 dans $\mathcal{S}$ alors la suite $\tilde{f}_n$ tend également vers 0 dans $\mathcal{S}$.

Démonstration. de la stabilité de $\mathcal{S}$- Montrons dans un premier temps que si $f \in \mathcal{S}$ alors $\tilde{f} \in \mathcal{S}$.

La fonction f est à décroissance rapide, donc sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ est également à décroissance rapide (et intégrable). On en déduit d'après le Théorème de dérivation 5.1.11 que $\tilde{f}$ est à décroissance rapide.

Il ne reste qu'à prouver que les dérivées de $\tilde{f}$ sont également à décroissance rapide. Or, les dérivées de tous ordres de f sont à décroissance rapide, donc $x \mapsto x^k f^{(n)}$ est intégrable pour tout $k, n \in \mathbb{N}$; ainsi, en utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue 5.1.4, on a $\lim_{|x|\to\infty} |x^k f^{(n)}(x)| = 0$ ce que l'on voulait démontrer. ∎

Pour parler de la continuité de la transformation de Fourier $\mathcal{F}_{[\cdot]}$ dans $\mathcal{S}$, il faut d'abord préciser la notion de convergence dans $\mathcal{S}$.

Définition 5.1.19 Soit $f \in \mathcal{S}$. On dit que la suite f_n d'éléments de $\mathcal{S}$ *converge dans* $\mathcal{S}$ vers f ssi pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^p |f_n^{(q)}(x) - f^{(q)}(x)| = 0$$

Cette notion de convergence dans $\mathcal{S}$ est très forte ; notamment, elle implique la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que toutes les dérivées $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin pour terminer le tour des propriétés importantes pour la transformée de Fourier sur l'espace $\mathcal{S}$, on va se demander ce qu'il advient de la formule d'inversion. On sait que si $f \in \mathcal{S}$, alors elle admet une transformée de Fourier $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ et puisque $\tilde{f}$ est intégrable et continue, on aura bien grâce à la Proposition d'inversion de la transformée de Fourier 5.1.7 la relation $\bar{\mathcal{F}}_{\left[\mathcal{F}_{[f]}\right]} = f$. On aura même un peu plus :

Théorème 5.1.20. *La transformation de Fourier est une application linéaire et bijective et bi-continue, i.e. continue ainsi que sa réciproque, de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. Son inverse est $\mathcal{F}^{-1}[\cdot] = \bar{\mathcal{F}}_{[\cdot]}$.*

Transformée de Fourier dans L_2

Pour définir la transformée de Fourier sur L_2 des fonctions de carré intégrable, on va utiliser les résultats précédents sur la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}$ ainsi que le lemme suivant qui est ici admis dans le cadre de ce cours :

Lemme 5.1.21. Densité de $\mathcal{S}$ dans L_2- *L'espace $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel dense de l'espace $\mathsf{L}_2(\mathbb{R})$.*

On montre ensuite que si f et g sont deux fonctions de $\mathcal{S}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu)\overline{\tilde{g}(\nu)}d\nu$$

C'est une simple conséquence du théorème de Fubini et de quelques manipulations de conjugaison complexe. On utilise ensuite les propriétés suivantes

— $\mathcal{S}$ est dense dans L_2,

— L_2 est complet,

pour montrer que la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}$ se prolonge en un opérateur sur L_2 qui reste linéaire et continu. On obtient alors un opérateur "transformation de Fourier" défini pour toute fonction $f \in \mathsf{L}_2$ qui vérifie le théorème suivant :

Théorème 5.1.22. Parseval-Plancherel- *La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{[\cdot]}$ est une isométrie sur L_2 : si f et g sont deux fonctions de L_2 alors $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ le sont aussi et on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu)\overline{\tilde{g}(\nu)}d\nu$$

De plus, pour tout $f \in \mathsf{L}_2$, on a $\bar{\mathcal{F}}_{\left[\mathcal{F}_{[f]}\right]} = \mathcal{F}_{\left[\bar{\mathcal{F}}_{[f]}\right]} = f$ presque partout. La transformée de Fourier inverse est donc donnée par $\mathcal{F}^{-1}[\cdot] = \bar{\mathcal{F}}_{[\cdot]}$.

Remarque 5.1.1 On prendra garde dans le théorème précédent que la notion d'inverse de la transformée de Fourier pour des fonctions L_2 est $\bar{\mathcal{F}}_{\left[\mathcal{F}_{[f]}\right]} = \mathcal{F}_{\left[\bar{\mathcal{F}}_{[f]}\right]} = f$ **presque partout**. Si par contre, on sait que la fonction f est dans $\mathcal{S}$ alors par le théorème 5.1.20, on aura $\bar{\mathcal{F}}_{\left[\mathcal{F}_{[f]}\right]} = \mathcal{F}_{\left[\bar{\mathcal{F}}_{[f]}\right]} = f$ **partout** et non plus presque partout.

> Si on connaît la transformée de Fourier, comment retrouver la fonction originale ?- Nous avions vu la réponse à cette question lorsque $f \in \mathsf{L}_1$. Si maintenant $f \in \mathsf{L}_2$, alors comment faire ? D'abord, on regarde si $f \in \mathcal{S}$ auquel cas, il suffit d'utiliser le théorème 5.1.20. Si ce n'est pas le cas, alors on peut tenter d'utiliser le théorème 5.1.22. Par contre ce dernier théorème ne permet de récupérer la fonction originale que presque partout (contrairement au théorème 5.1.20), c'est pourquoi, il est beaucoup moins utilisé.

Enfin, la proposition suivante montre que la définition de la transformée de Fourier sur L_1 et L_2 coincident sur $\mathsf{L}_1 \cap \mathsf{L}_2$.

Proposition 5.1.23. *La transformée de Fourier sur* L_1 *et celle sur* L_2 *coincident sur* $\mathsf{L}_1 \cap \mathsf{L}_2$.

En d'autres termes si f est une fonction de carré intégrable et si elle est de plus, intégrable elle-même alors sa transformée de Fourier définie dans ce paragraphe vaut bien :

$$\mathcal{F}_{[f]} : \nu \mapsto \int f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx.$$

FONCTIONS DANS L_2 MAIS PAS DANS L_1- Mais alors, comment écrit-on la transformée de Fourier d'une fonction de carré sommable mais qui ne serait pas sommable elle-même ? En fait, on peut montrer que si f est dans L_2, sa transformée de fourier $\tilde{f}$ dans L_2 peut être obtenue comme la limite (dans L_2) suivante :

$$\boxed{\tilde{f}(\cdot) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\cdot x}dx}.$$

5.1.4 Transformée de Fourier et convolution

On rappelle la définition du produit de convolution de deux fonctions :

Formule de convolution

Définition 5.1.24 Si f et g sont deux fonctions localement sommables, leur *produit de convolution*, lorsqu'il existe est $h = f * g$ avec :

$$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int f(t)g(x-t)dt$$

Le théorème de Fubini permet de démontrer le résultat fondamental suivant :

Théorème 5.1.25. *Soient f et g deux fonctions admettant des transformées de Fourier et telle que leur produit de convolution existe et est dans* L_1. *Alors*

$$\mathcal{F}_{[f*g]} = \mathcal{F}_{[f]} \cdot \mathcal{F}_{[g]} \quad \textit{ou encore} \quad \widetilde{f*g}(\nu) = \tilde{f}(\nu)\cdot\tilde{g}(\nu)$$

De même, lorsque ces expressions sont définies, on a

$$\mathcal{F}_{[f\cdot g]} = \mathcal{F}_{[f]} * \mathcal{F}_{[g]} \quad \textit{ou encore} \quad \widetilde{f\cdot g}(\nu) = \tilde{f}(\nu) * \tilde{g}(\nu)$$

En d'autres termes, la transformée de Fourier "échange" produit de convolution en produit de fonctions et réciproquement.

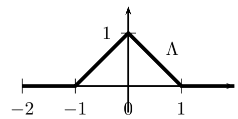
DÉMONSTRATION. On pose $\varphi(x,t) = f(t)g(x-t)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}$. Alors,

$$\mathcal{F}_{[f*g]}(\nu) = \int\left(\int f(t)g(x-t)dt\right)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx = \int\left(\int \varphi(x,t)dt\right)dx.$$

Or, d'après le théorème de Fubini, φ est sommable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{[f*g]}(\nu) &= \int\left(\int \varphi(x,t)\right)dt = \int\left(\int f(t)g(x-t)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu x}dx\right)dt \\
&= \int f(t)\left(\int g(x-t)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu(x-t)}dx\right)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu t}dt \\
&= \int f(t)\tilde{g}(\nu)\mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu t}dt = \tilde{f}(\nu)\tilde{g}(\nu)
\end{aligned}$$

La deuxième formule est plus délicate à démontrer, aussi nous l'admettrons. ■



Exemple 5.1.5 Nous voulons calculer la transformée de Fourier de la fonction Λ définie par :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 1. \end{cases}$$

On commence par montrer que $\Lambda(x) = [\Pi * \Pi](x)$ et on en déduit que : $\mathcal{F}_{[\Lambda(x)]} = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$. On note que la formule de Parseval-Plancherel nous donne

$$\int \Lambda(x)dx = \int \Pi(x)dx \times \int \Pi(x)dx = 1$$

ce qui est le résultat attendu.

Limitations de la formule de convolution

On peut démontrer les résultats suivants sans hypothèse supplémentaire.

Théorème 5.1.26. *i) si $f, g \in \mathsf{L}_1$ alors $\widetilde{f * g}(\nu) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$;*

ii) si $f, g \in \mathsf{L}_1$ et que leurs transformées de Fourier sont également dans L_1 alors $\widetilde{f \cdot g}(\nu) = \tilde{f} * \tilde{g}(\nu)$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$;

iii) si $f, g \in \mathsf{L}_2$, on peut prendre la transformée inverse de la première formule et écrire $f * g(t) = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f} \cdot \tilde{g}]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ ce qui est un bon moyen de calculer $f * g$; de plus, le seconde formule reste valable : $\widetilde{f \cdot g}(\nu) = \tilde{f} * \tilde{g}$ pour tout $\nu \in \mathbb{R}$;

iv) si $f \in \mathsf{L}_1$ mais que $g \in \mathsf{L}_2$ alors $f * g(t) = \bar{\mathcal{F}}_{[\tilde{f} \cdot \tilde{g}]}(t)$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.

5.2 Points essentiels du chapitre

a) Transformée de Fourier dans L_1, Lemme de Riemann-Lebesgue.

b) Différents théorèmes permettant d'inverser la transformée de Fourier.

c) Différentes propriétés sur la transformée de Fourier, notamment lien entre rapidité de décroissance de f (resp. $\tilde{f}$) et régularité de $\tilde{f}$ (resp. f).

d) Espace de Schwartz $\mathcal{S}$: la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ puis comme $\mathcal{S}$ est dense dans L_2, cela permet de définir la transformée de Fourier dans L_2 en utilisant une certaine isométrie.

e) Formule de la transformée de Fourier d'une fonction dans L_2 et pas dans L_1.

f) La transformée de Fourier échange produit de convolution et produit de fonctions.

5.3 Un peu d'histoire

Fourier (1768-1830). Source : Bibmath.

Jean-Baptiste Fourier (qu'on connaît aussi sous le nom de Joseph Fourier) est né le 21 mars 1768 à Auxerre. Il est le douzième des quinze enfants de son père. Alors qu'il n'a que 10 ans, il perd ses parents et est placé à l'école militaire d'Auxerre. Il réalise des études prometteuses en Français et en latin, mais son intérêt se porte sur les mathématiques. Il lit notamment les 6 tomes du Cours de mathématiques de Bezout. Il rentre ensuite au séminaire, mais n'a pas vraiment la vocation et il retourne en 1789 enseigner à son ancienne école à Auxerre.

Fourier se montre un révolutionnaire actif, animateur du comité local révolutionnaire d'Auxerre. Un incident l'oppose à une faction rivale à Orléans en 1793. Il est emprisonné, et en ces temps de Terreur, son chemin le menait droit à la guillotine. Mais la chute de Robespierre provoque des changements politiques en France, et Fourier est libéré.

En 1794, il est de la première promotion de l'Ecole Normale Supérieure, où ses professeurs ont pour nom Lagrange, Laplace et Monge. Elève le plus brillant, il profite de cet excellent entourage pour s'investir beaucoup dans la recherche mathématique. En 1797, il remplace Lagrange à la chaire d'analyse et de mécanique de l'Ecole Polytechnique, bien qu'il n'ait pas encore à son actif de découverte majeure.

En 1798, il rejoint les expéditions napoléoniennes en Egypte, où de nombreux chercheurs français mènent d'ambitieuses recherches - qui se feront, hélas, au détriment des richesses locales pillées. Napoléon rencontre alors de nombreux succès (Malte, Alexandrie). Mais après la destruction de la flotte napoléonienne par celle de Nelson dans la bataille du détroit du Nil en août 1798, Napoléon et son armée se voient confiner dans les pays qu'ils viennent de conquérir. Fourier devient alors secrétaire de l'Institut d'Egypte mis en place par Monge, et il se révèle très compétent à ce poste. Par la suite, de nombreuses missions diplomatiques lui seront confiées. En même temps, il s'intéresse à l'art et à l'égyptologie.

Quand Fourier regagne la France en 1801, Napoléon n'a pas oublié ses excellents états de service, et le nomme préfet de l'Isère, sans que l'on sache si Fourier lui-même désirait ce poste. Il reste que Fourier fut un excellent préfet, qui mena à bien plusieurs projets d'importance. C'est à Grenoble que Fourier réalise l'essentiel de ces travaux les plus importants. Son obsession est le problème de la chaleur, c'est-à-dire l'étude de l'évolution de la température d'un corps au cours du temps. De 1802 à 1807, il trouve l'équation de la propagation de la chaleur dans les corps solides, puis trouve une méthode pour la résoudre, ce qui est maintenant l'analyse de Fourier. Fourier décompose une fonction mathématique unique, mais difficile à décrire mathématiquement, en une somme infinie de fonctions en sinus et en cosinus. Il est alors plus facile de décrire au cours du temps l'évolution de chacune de ces fonctions, et de retrouver la température au temps t en refaisant la somme.

Cette hypothèse audacieuse est contestée par ses contemporains Laplace, Poisson et Lagrange ; ce dernier se lève même en pleine séance de l'Institut des sciences et déclare qu'il tient pour fausse la théorie de Fourier. Il faut dire que, même pour les critères de rigueur de l'époque, les conclusions de Fourier étaient hardies. Par exemple, dans un langage moderne, Fourier ne s'intéresse jamais à la convergence de ses séries. Pour les anciens, ce qui les tracassait était plutôt le phénomène inverse : il leur semblait impossible qu'une superposition, même infinie, de fonctions continues, puisse donner une fonction discontinue. Malgré ces réserves, Fourier est primé par l'Institut pour son mémoire en 1812.

En 1815 Napoléon s'échappe de l'ile de l'Elbe, et revient avec toute une armée vers la France. Fourier est toujours préfet de l'Isère, et Grenoble est sur la route de Napoléon. Fourier obéit aux injonctions du roi, et ordonne qu'on s'oppose à Napoléon. Il parvient toutefois à manoeuvrer assez habilement pour que Napoléon ne lui en veuille pas, et le nomme préfet du Rhône quand il reprend le pouvoir. Les événements politiques font que Fourier n'occupera jamais ce poste. Au contraire, en 1817, il est élu à l'Académie des sciences réhabilitée. En 1822, il devient secrétaire de la section mathématique. A ce poste, il aidera beaucoup de jeunes mathématiciens prometteurs, dont Dirichlet, Sturm ou Ostrogradsky. Pendant la fin de sa vie, il consacre beaucoup de temps à préciser ses arguments, et à débattre avec ses contemporains, notamment Biot et Poisson, qui lui contestent la priorité des découvertes !

Chapitre 6

Transformation de Laplace

Sommaire

Mots clés 6.1 Fonction causale, transformée de Laplace unilatérale, bilatérale, original-image, abscisse de sommabilité, contour de Bromwich.

Dans ce dernier chapitre, nous présentons la transformée de Laplace qui est une extension de la transformée de Fourier. La plupart des propriétés de la transformée de Laplace seront directement issues des propriétés correspondantes pour la transformée de Fourier. Certains résultats seront obtenus grâce à l'analyse complexe, telle qu'elle est décrite dans le Chapitre 3. On fera attention à acquérir une certaine terminologie associée aux notions de transformées de Laplace. Nous n'envisagerons ici que les transformations de Laplace des fonctions et non celle des distributions.

6.1 Définition et sommabilité

Définition 6.1.1 On appelle *fonction causale* toute fonction $t \mapsto f(t)$ nulle pour les valeurs négatives de son argument :

$$\forall t < 0, \quad f(t) = 0$$

Aucune condition de continuité en 0 n'est exigée dans la définition.

6.1.1 Définition

Définition 6.1.2 Si f est une fonction réelle ou complexe, localement sommable de la variable réelle t, on appelle *transformée de Laplace (unilatérale)* de f la fonction complexe notée $\hat{f}(p)$ de variable complexe p définie par

$$\hat{f}(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

Définition 6.1.3 Soit f une fonction localement sommable. La *transformée de Laplace bilatérale* de f est la fonction

$$p \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

La transformée de Laplace bilatérale de $H(t)f(t)$ est simplement la transformée de Laplace unilatérale de la fonction $f(t)$. Dans la suite, seule la transformée unilatérale nous intéressera.

Remarque 6.1.1 Si f est une fonction *nulle* pour $t < 0$ et admettant une transformée de Fourier alors on a la relation

$$\hat{f}(\mathbf{i}\omega) = \tilde{f}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

La transformation de Laplace est une extension de la notion de transformation de Fourier. Plus précisément, $\hat{f}(x+\mathbf{i}\omega)$ est au changement de variable $\omega = 2\pi\nu$ près, la transformée de Fourier de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ en $\omega/2\pi$.

Définition 6.1.4 Original, Image- On appelle *original* toute fonction f de la variable réelle, localement sommable, à valeurs réelles ou complexes et telle que

i) f est causale ($f(t) = 0$ pour tout $t < 0$)

ii) $|f(t)|$ ne croît pas plus vite qu'une exponentielle, c'est à dire qu'il existe deux constantes $M > 0$ et $s \in \mathbb{R}$ telles que

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{st} \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

La transformée de Laplace d'un original s'appelle *image* de l'original.

On utilisera les notations suivantes : si $f(t)$ est un original, on notera $\hat{f}(p)$ sa transformée de Laplace. **Le symbole $\sqsupset$ est également répandu, que l'on utilise ainsi $f(t) \sqsupset F(p)$.**

6.1.2 Sommabilité

Dans toute la suite, on pose $p = x + \mathbf{i}\omega$. Soit f une fonction localement sommable, cherchons le domaine de définition de sa transformée de Laplace $\hat{f}$. On note en premier lieu que l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est équivalente à l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

On note ensuite que s'il y a sommabilité pour un certain x_0, il y a sommabilité pour tous les $x > x_0$, puisque

$$|f(t)\mathrm{e}^{-xt}| = |f(t)\mathrm{e}^{-x_0t}|\mathrm{e}^{-(x-x_0)t} \leq |f(t)\mathrm{e}^{-x_0t}|.$$

En conséquence de quoi, le domaine de définition de $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est un demi plan complexe infini à droite ou bien le plan $\mathbb{C}$ tout entier ou bien l'ensemble vide.

Définition 6.1.5 On appelle *abscisse de sommabilité* de la fonction originale f la borne inférieure de tous les x pour lesquels il y a sommabilité :

$$\alpha = \inf\left\{x \in \mathbb{R}; t \mapsto |f(t)|\mathrm{e}^{-xt} \text{ est intégrable }\right\}$$

Le raisonnement précédent montre que l'on a le résultat suivant :

Proposition 6.1.6. *Soient $f(t)$ un original et α son abscisse de sommabilité. On pose $p = x+\mathbf{i}\omega$; alors*

i) pour $x < \alpha$, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ n'est pas intégrable ;

ii) pour $x > \alpha$, cette fonction est intégrable ;

iii) pour $x = \alpha$, elle peut être, ou ne pas être, intégrable au sens de Lebesgue. Si elle n'est pas Lebesgue-intégrable, l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \lim_{R\to\infty, R'\to-\infty} \int_{R'}^{R} f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$$

peut cependant converger pour certaines valeurs de $p = \alpha + \mathbf{i}\omega$, ce qui permet d'étendre la transformée de Laplace de f à ces valeurs de p.

Dans ce chapitre, nous utiliserons souvent la fonction de Heaviside H dont nous rappelons la définition : $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Exemple 6.1.1 La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside H s'écrit

$$\hat{H}(p) = \int_0^{\infty} H(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \frac{1}{p}\left[\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{\infty},$$

ce qui montre que l'abscisse de sommabilité de H vaut 0 et que pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}\mathrm{e}\ (p) > 0$, $\hat{H}(p) = 1/p$. Le domaine de définition de $\hat{H}$ est donc un demi-plan *ouvert*.

On remarquera que si l'on étend la fonction $\hat{H}$ à l'axe imaginaire en posant pour tout ω non nul, $H(\mathbf{i}\omega) = 1/\mathbf{i}\omega$, on a une fonction "proche" de la transformée de Fourier de H, qui vaut

$$\tilde{H}(\nu) = \mathrm{vp}\frac{1}{2\mathbf{i}\pi\nu} + \frac{\delta}{2}$$

et qui est égale à $\mathrm{vp}(1/2\mathbf{i}\pi\nu)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 6.1.2 On pose $f(t) = 1/(1+t^2)$. Alors

$$\hat{f}(p) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-pt}}{1+t^2}dt$$

est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}\mathrm{e}\ (p) \geq 0$. Le domaine de définition de $\hat{f}$ est donc un demi plan *fermé*.

Exemple 6.1.3 Soit $a \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque et cherchons la transformée de Laplace de $t \mapsto H(t)\mathrm{e}^{at}$.

$$H(t)\mathrm{e}^{at} \sqsupset \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(p-a)t}dt,$$

ce qui montre que l'abscisse de sommabilité est $\alpha = \mathcal{R}\mathrm{e}\ (a)$ et que pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}\mathrm{e}\ (p) > \mathcal{R}\mathrm{e}\ (a)$, la transformée de Laplace de $H(t)\mathrm{e}^{at}$ est $1/(p-a)$.

Théorème 6.1.7. *Dans le demi plan ouvert de sommabilité, la transformée de Laplace $\hat{f}$ est* holomorphe *donc analytique.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > \alpha$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^m f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable. En effet, puisque $x > \alpha$, le réel $y = (x+\alpha)/2$ vérifie $\alpha < y < x$; de plus, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-yt}$ est intégrable et l'on peut écrire

$$t^m|f(t)|\mathrm{e}^{-xt} = |f(t)|\mathrm{e}^{-yt} \times t^m\mathrm{e}^{-(x-a)t/2},$$

où le premier terme est intégrable et le second borné. La dérivée de $\hat{f}$ se calcule grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral et vaut

$$\frac{d\hat{f}}{dp} = \hat{f}'(p) = \int_0^{\infty} (-t)f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt.$$

$\hat{f}$ étant dérivable en tout point du demi-plan ouvert $\{p \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}\ (p) > \alpha\}$, elle est analytique.

On note que l'abscisse de sommabilité de $t \mapsto tf(t)$ est la même que celle de f. On montre enfin par une récurrence immédiate que $\hat{f}^{(n)}(p) = \int_0^{\infty}(-t^n)f(t)\mathrm{e}^{-pt}dt$. ∎

On admet le résultat suivant :

Proposition 6.1.8. *Soit f un original.*

i) Si la fonction $f(t)$ est à support borné à droite, alors $\alpha = -\infty$.

ii) Si $f(t)$ est à décroissance rapide à droite, alors $-\infty \leq \alpha < 0$ et $\hat{f}(p)$ est holomorphe dans un demi-plan comportant l'axe imaginaire pur (notamment la transformée de Fourier existe).

iii) Si $f(t)$ est tempérée (au sens des distributions), alors $\alpha = 0$, et sa transformée de Fourier n'existe pas forcément au sens des fonctions ; en revanche, elle existe au sens des distributions.

iv) Enfin, si $f(t)$ est à décroissance rapide, $0 < \alpha \leq \infty$ alors $\hat{f}$ est holomorphe sur un demi-plan ne contenant pas l'axe imaginaire pur et la transformée de Fourier de f n'existe pas.

Exemple 6.1.4 La fonction "porte" a pour abscisse de sommabilité $-\infty$ et

$$\hat{\Pi}(p) = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-pt} dt = \frac{1 - \mathrm{e}^{-p/2}}{p},$$

qui est analytique sur $\mathbb{C}$; la singularité en 0 est en effet factice, puisque $\hat{\Pi}$ admet le développement en série entière :

$$\hat{\Pi}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}} \right) p^n.$$

Toute fonction polynômiale et toute fraction rationnelle a pour abscisse de sommabilité 0.

6.1.3 Propriétés de la transformée

Proposition 6.1.9. *Soient $f(t)$ une fonction originale et $\hat{f}(p)$ son image par la transformation de Laplace. Si $x > \alpha$, alors $\hat{f}(x + \mathbf{i}\omega)$ tend vers 0 pour $\omega \to \pm\infty$.*

Démonstration. C'est une simple conséquence du Lemme de Riemann-Lebesgue 5.1.4 :

$$\lim_{\omega \to \pm\infty} \int_0^{\infty} \left[f(t)\mathrm{e}^{-xt} \right] \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t} dt = 0$$

■

On sait qu'à droite de l'abscisse de sommabilité, la transformée de Laplace est holomorphe. Qu'en est il ailleurs ?

On pose par exemple, $f(t) = \mathrm{e}^{3t}$. L'abscisse de sommabilité est $\alpha = 3$. Sa transformée de Laplace est $\hat{f}(p) = 1/(p-3)$ qui est holomorphe partout sauf en $p = 3$. Plus exactement, $\hat{f}$ est définie dans le demi-plan de sommabilité $\{z \in \mathbb{C}; \mathcal{R}\mathrm{e}\ (z) > 3\}$ mais on peut la prolonger *analytiquement* sur le plan pointé $\mathbb{C} \setminus \{3\}$.

6.2 Inversion

On peut trouver une formule d'inversion de la transformation de Laplace grâce à nos connaissances sur l'inversion de la transformée de Fourier. En effet, si $f(t)$ admet pour transformée de Laplace la fonction $\hat{f}(p)$, on a, pour tout $x > \alpha$,

$$\hat{f}(x + 2\mathbf{i}\pi\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) f(t) \mathrm{e}^{-xt} \mathrm{e}^{-2\mathbf{i}\pi\nu t} dt,$$

ce qui montre que à x fixé, la fonction $\nu \mapsto \hat{f}(x + 2\mathbf{i}\pi\nu)$ est la transformée de Fourier de $H(t)f(t)\mathrm{e}^{-xt}$. La formule d'inversion de Fourier nous conduit donc, lorsque t est un point de continuité de $H(t)f(t)$, à

$$H(t)\mathrm{e}^{-xt} f(t) = \int F(x + 2\mathbf{i}\pi\nu) \mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi\nu t} d\nu$$

soit $H(t)f(t) = \int F(x + 2\mathbf{i}\pi\nu)\mathrm{e}^{xt}\mathrm{e}^{2\mathbf{i}\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{D_x} \hat{f}(p)\mathrm{e}^{pt} dp$, où l'on a noté $p = x + 2\mathbf{i}\pi\nu$ et D_x la droite

$$D_x \stackrel{\text{def}}{=} \{x + \mathbf{i}\omega; \omega \in \mathbb{R}\} \qquad (\blacktriangleright\text{Contour de Bromwich})$$

Remarque 6.2.1 Il est à noter que la formule obtenue nous donne l'original en fonction de la valeur de la fonction image et ceci pour $x > \alpha$ *quelconque*.

Le résultat de l'intégrale est en effet indépendant du domaine d'intégration, puisque, $\hat{f}$ étant analytique sur le demi plan de sommabilité, le théorème de Cauchy nous garantit la nullité de la différence entre les intégrales sur D_x et sur $D_{x'}$ (en utilisant de plus le fait que $\lim_{\omega \to \pm\infty} F(p) = 0$ conformément à la Proposition 6.1.9).

Théorème 6.2.1. Inversion de la transformée de Laplace- *Soient f un original et $\hat{f}$ sa transformée de Laplace. Si l'on note α son abscisse de sommabilité, on a la formule d'inversion, valable en tout point de continuité de f :*

$$f(t) = \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{x_0 - \mathbf{i}\infty}^{x_0 + \mathbf{i}\infty} \hat{f}(p) \mathrm{e}^{pt} dp$$

avec $x_0 > \alpha$ quelconque.

6.3 Propriétés élémentaires et exemples de transformées de Laplace

6.3.1 Propriétés

La plupart des propriétés des transformées de Fourier se retrouvent pour les transformées de Laplace.

Translation

Il existe un théorème de translation semblable à celui connu pour la transformation de Fourier mais qui demande ici une précaution supplémentaire : puisqu'on s'intéresse ici à la transformée de Laplace *unilatérale*, on va écrire explicitement la fonction $H(t)f(t)$ et non simplement $f(t)$. Alors, en notant, comme d'habitude, $p = x + \mathbf{i}\omega$, et α l'indice de sommabilité pour la fonction f, on a

$$\begin{array}{rcl} \text{si} & H(t)f(t) \sqsupset F(p) & \text{pour } \alpha < x \\ \text{alors} & H(t)f(t)\mathrm{e}^{-at} \sqsupset F(p+a) & \text{pour } \alpha - \mathcal{R}\mathrm{e}\ (a) < x. \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{rcl} \text{si} & H(t)f(t) \sqsupset F(p) & \text{pour } \alpha < x \\ \text{alors} & H(t)f(t-\tau) \sqsupset F(p)\mathrm{e}^{-\tau p} & \text{pour } \alpha - \tau < x. \end{array}$$

Attention donc à bien prendre $H(t-\tau)f(t-\tau)$, c'est-à-dire la fonction qui s'annule pour $t < \tau$. Il n'y a, *a priori*, aucun lien entre la transformée de Laplace de la fonction $H(t)f(t-\tau)$ et celle de $H(t)f(t)$.

Convolution

De même qu'avec la transformée de Fourier, on a un théorème de convolution dont la preuve est admise.

Théorème 6.3.1. *Soient f et g des originaux d'abscisse de sommabilité α et α'.*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Si} & f(t) \sqsupset F(p) & \textit{pour } \alpha < x \\ \textit{et} & g(t) \sqsupset G(p) & \textit{pour } \alpha' < x \\ \textit{alors} & [Hf * Hg](t) \sqsupset F(p)G(p) & \textit{pour } \max(\alpha, \alpha') < x. \end{array}$$

où $*$ est le symbole de convolution défini dans le paragraphe **??**. *De même, on a :*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Si} & f(t) \sqsupset F(p) & \textit{pour } \alpha < x \\ \textit{et} & g(t) \sqsupset G(p) & \textit{pour } \alpha' < x \\ \textit{alors} & f(t)g(t) \sqsupset \frac{1}{2\mathbf{i}\pi} \int_{x_0 - \mathbf{i}\infty}^{x_0 + \mathbf{i}\infty} F(s)G(p-s)ds & \textit{pour } \begin{cases} \alpha < x_0 \\ \alpha + \alpha' < x_0 \end{cases} \end{array}$$

6.3.2 Dérivation et intégration

Cherchons maintenant quelle est la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction *au sens des fonctions.*

On suppose donc que f est une fonction originale et que

$$f(t)H(t) \sqsupset F(p).$$

On suppose que f est dérivable au sens des fonctions ; on a alors

$$H(t)f'(t) \sqsupset \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}dt = \int_0^\infty pf(t)\mathrm{e}^{-pt}dt + \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^\infty,$$

et le dernier terme vaut simplement $-\lim_{t\to 0^+} f(t)$ que l'on notera $-f(0^+)$. Ainsi, on a

Théorème 6.3.2. Transformation de Laplace et dérivation- *Si f est un original continu et dérivable et si sa dérivée est également un original, alors en notant $f(t) \sqsupset F(p)$, la transformée de Laplace de la dérivée de f* au sens des fonctions *est donnée par*

$$H(t)\frac{d}{dt}f(t) \sqsupset pF(p) - f(0^+),$$

avec la même abscisse de sommabilité.

De même, si f est dérivable n fois et si sa dérivée n-ième est un original, alors

$$H(t)\frac{d^n}{dt^n}f(t) \sqsupset p^nF(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+),$$

avec la même abscisse de sommabilité.

Il est très important de noter que l'on prend la dérivée au sens des fonctions et que la dérivation en 0 ne doit pas faire apparaître de distribution δ. C'est pourquoi le terme $H(t)$ a été explicitement réécrit en dehors de la dérivation.

On a également le théorème réciproque :

Théorème 6.3.3. *Si $f(t)$ est un original avec une abscisse de sommabilité α, alors $t^nf(t)$ est un original avec la même abscisse de sommabilité. Si $f(t) \sqsupset F(p)$, alors*

$$(-t)^nf(t) \sqsupset \frac{d^n}{dp^n}F(p).$$

Pareillement, on a le théorème d'intégration suivant :

Théorème 6.3.4. *Si f est un original, d'abscisse de sommabilité α.*

$$\begin{array}{lll} \textit{Si} & f(t) \sqsupset F(p) & \textit{pour } \alpha < x, \\ \textit{alors} & \int_0^t f(u)du \sqsupset \frac{F(p)}{p} & \textit{pour } \max(\alpha, 0) < x. \end{array}$$

Remarque 6.3.1 On peut le déduire du théorème de convolution puisque

$$\int_0^t f(u)du = [f * H](t).$$

Réciproquement, on a

Théorème 6.3.5. *Soit f un original.*

$$\begin{array}{lll} \textit{Si} & f(t) \sqsupset F(p) & \textit{pour } \alpha < x, \\ \textit{alors} & \frac{f(t)}{t} \sqsupset \int_p^\infty F(z)dz & \textit{pour } \sup(\alpha, 0) < x. \end{array}$$

Dans cette dernière équation, le chemin d'intégration relie le point p à l'infini, dans une direction quelconque du demi-plan de sommabilité. Le résultat de l'intégration est indépendant du chemin suivi car F est holomorphe dans ce demi-plan. Il est néanmoins nécessaire que $F(z)$ décroisse plus vite que $1/z$ à l'infini.

6.3.3 Exemples

On a déjà montré que

$$H(t) \sqsupset \frac{1}{p} \quad \text{avec } 0 < \mathcal{R}\text{e } p.$$

En utilisant les théorèmes d'intégration et de translation, on obtient

$$H(t)\mathrm{e}^{at} \sqsupset \tfrac{1}{p-a} \quad \text{avec } \mathcal{R}\text{e } (a) < \mathcal{R}\text{e } (p),$$
$$H(t)\mathrm{e}^{at}\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \sqsupset \tfrac{1}{(p-a)^n} \quad \text{avec } \mathcal{R}\text{e } (a) < \mathcal{R}\text{e } (p).$$

Cela permet notamment de trouver, grâce à une décomposition en pôles simples, l'original de Laplace de toute fraction rationnelle. A noter (sans démonstration) que la formule (6.1) reste valable si l'on prend n non entier ; il suffit alors de remplacer dans la formule le terme $(n-1)!$ par $\Gamma(n)$ où Γ est la fonction d'Euler défini pour $\mathcal{R}\text{e } z > 0$ par la représentation intégrale :

$$\Gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{z-1} dx.$$

En particulier, on a les relations suivantes :

$$H(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\omega t} \sqsupset \frac{1}{p-\mathbf{i}\omega} \quad \text{et} H(t)\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\omega t} \sqsupset \frac{1}{p+\mathbf{i}\omega} \quad \text{avec } 0 < \mathcal{R}\text{e } (p).$$

On en déduit, par la linéarité de la transformation de Laplace,

$$H(t)\cos(\omega t) \sqsupset \frac{p}{p^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad H(t)\sin(\omega t) \sqsupset \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \text{avec } 0 < \mathcal{R}\text{e } (p).$$

De même,

$$H(t)\mathrm{ch}(\omega t) \sqsupset \frac{p}{p^2-\omega^2} \quad \text{et} \quad H(t)\mathrm{sh}(\omega t) \sqsupset \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \quad \text{avec } 0 < \mathcal{R}\text{e } (p).$$

6.4 Points essentiels du chapitre

a) Définitions diverses : fonctions causales, transformée de Laplace, original-image, abscisse de sommabilité.

b) Faire attention à la forme particulière du domaine de sommabilité.

c) Expression de la transformée de Laplace inverse, contour de Bromwich.

d) Propriétés de transformée de Laplace. Notamment, convolution, dérivation et intégration.

6.5 Un peu d'histoire

Marquis Pierre Simon de Laplace (1749-1827). Source : Bibmath.

Né à Beaumont-en-Auge, fils de cultivateur, Laplace s'initia aux mathématiques à l'École militaire de cette petite ville. Il y commença son enseignement. Il doit cette éducation à ses voisins aisés qui avait détecté son intelligence exceptionnelle.

A 18 ans, il arrive à Paris avec une lettre de recommandation pour rencontrer le mathématicien d'Alembert, mais ce dernier refuse de rencontrer l'inconnu. Mais Laplace insiste : il envoie à d'Alembert un article qu'il a écrit sur la mécanique classique. D'Alembert en est si impressionné qu'il est tout heureux de patronner Laplace. Il lui obtient un poste d'enseignement en mathématique. En 1783, il devint examinateur du corps de l'artillerie et fut élu, en 1785, à l'Académie des Sciences. A la Révolution, il participa à l'organisation de l'École Normale et de l'Ecole Polytechnique, et fut membre de l'Institut, dès sa création. Bonaparte lui confia le ministère de l'Intérieur, mais seulement pour 6 mois.

L'oeuvre la plus importante de Laplace concerne le calcul des probabilités et la mécanique céleste. Il établit aussi, grâce à ses travaux avec Lavoisier entre 1782 et 1784 la formule des transformations adiabatiques d'un gaz, ainsi que deux lois fondamentales de l'électromagnétisme. En mécanique, avec le mathématicien Joseph-Louis de Lagrange, Laplace résume ses travaux et réunit ceux de Newton, Halley, Clairaut, d'Alembert et Euler, concernant la gravitation universelle, dans les cinq volumes de sa "Mécanique céleste" (1798-1825).

On rapporte que feuilletant la "Mécanique céleste", Napoléon fit remarquer à Laplace qu'il n'y était nulle part fait mention de Dieu. "Je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse", rétorqua le savant.

Index