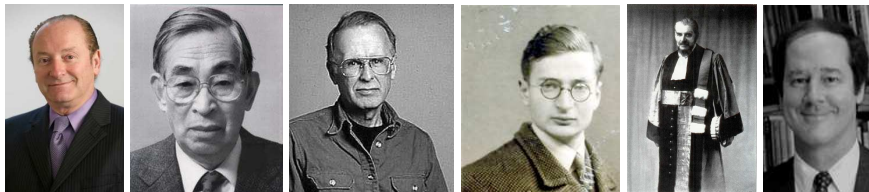




MAT 5501

Eléments de calcul stochastique

et applications à la finance



Randal DOUC

Avertissement

Ce cours reprend la majeure partie de la structure du livre "Calcul Stochastique appliqué à la finance" de Lamberton et Lapeyre. Nous l'avons enrichi de divers points de vue adoptés ici et là, notamment dans les notes de cours de Romuald Elie, Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet... Il a bénéficié d'une relecture active de Cyrille Dubarry.

N'hésitez pas à communiquer par mail les erreurs qu'il pourrait rester ainsi qu'à proposer toute sorte de suggestions visant à améliorer le contenu de ce cours : randal.douc@it-sudparis.eu

Table des matières

1	Modèles discrets	7
1.1	Quelques définitions	7
1.2	Formalisme des modèles discrets	8
1.3	Probabilité risque-neutre	10
1.4	Calcul de la prime d'une option européenne	11
1.5	Points essentiels du chapitre	11
1.6	Un peu d'histoire	11
1.A	Appendice	12
1.A.1	Preuve du Lemme 1.2.3	12
1.A.2	Preuve du Théorème 1.3.2	12
2	Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein	15
2.1	Description du modèle	15
2.2	Absence d'Opportunité d'arbitrage	16
2.3	Formule de Black Scholes par l'approximation par arbres	17
2.4	Un peu d'histoire	17
3	Arrêt optimal et options américaines	19
3.1	Enveloppe de Snell et Pricing d'une option américaine	19
3.2	Le problème de l'arrêt optimal	20
3.3	Approche duale	21
3.4	Couverture et exercice pour les options américaines	21
3.4.1	Couverture de l'option américaine	22
3.4.2	Exercice de l'option américaine	22
3.5	Options américaines et européennes	22
3.6	Points essentiels du chapitre	23
3.7	Un peu d'histoire	23
3.A	Preuve du Théorème 3.2.1	24
3.B	Preuve de Théorème 3.2.2	24
4	Mouvement brownien et intégrales stochastiques	25
4.1	Généralités sur les processus à temps continu	25
4.1.1	Quelques définitions	25
4.2	Quelques résultats sur les temps d'arrêt	26
4.3	Le mouvement brownien	26
4.4	Martingale à temps continu	27
4.5	Intégrale stochastique et Calcul d'Itô	29
4.5.1	Calcul d'Itô	31
4.5.2	Formule d'Itô multidimensionnelle	34
4.6	Equations différentielles stochastiques	35
4.7	Changement de probabilité. Théorème de Girsanov	36

4.8	Points essentiels du chapitre	37
4.9	Un peu d'histoire	37
5	Modèle de Black and Scholes	41
5.1	Hypothèses sur le marché	41
5.2	Modélisation probabiliste du marché	41
5.2.1	Résolution de l'EDS de Black and Scholes	42
5.2.2	Changement de probabilité	42
5.2.3	Portefeuille autofinçant	43
5.2.4	Duplication du produit dérivé, EDP d'évaluation	44
5.2.5	Sensibilités	45
5.3	Formules de Black Scholes	45
5.4	Points essentiels du chapitre	46
5.5	Un peu d'histoire	46

Programme prévisionnel

1. Modèles discrets : cours, 3H. Td, 3H.
2. Modèle de Cox, Rox, Rubinstein : cours : 1H30.
3. Options américaines : cours, 1H30. Td, 1H30.
4. Tp arbres : 3H.
5. Processus Gaussien, Mvt Brownien : cours, 1H30. Td, 1H30.
6. Formules d'Itô, calcul d'Itô : cours, 1H30. Td, 1H30.
7. Equation Différentielle Stochastique : cours, 1H30. Td, 1H30.
8. Girsanov : cours, 1H30. Td, 1H30.
9. Résolution eq. Black and Scholes, Proba risque neutre : cours : 1H30
10. Stratégie de portefeuille simple autofinçante, duplication des produits dérivés : cours : 1H30. Td : 1H30
11. Formule Black and Scholes, EDP d'évaluation, sensibilité : cours : 1H30. Td : 1H30.

Chapitre 1

Modèles discrets

Sommaire

1.1 Quelques définitions	7
1.2 Formalisme des modèles discrets	8
Diverses notations et hypothèses	8
Actualisation	9
Contrainte d'autofinancement	9
Marché viable	10
Marché complet	10
1.3 Probabilité risque-neutre	10
1.4 Calcul de la prime d'une option européenne	11
1.5 Points essentiels du chapitre	11
1.6 Un peu d'histoire	11
Robert Merton. Source : wikipedia	11
Robert King Merton. Source : wikipedia	12
1.A Appendice	12
1.A.1 Preuve du Lemme 1.2.3	12
1.A.2 Preuve du Théorème 1.3.2	12

Mots clés 1.1 Absence d'opportunité d'arbitrage, probabilité risque neutre, portefeuille autofinancé, prix d'une option européenne.

1.1 Quelques définitions

Marché liquide : on trouve des acheteurs et des vendeurs pour tous les actifs du marché quelle que soit la quantité de ces actifs.

Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) : on ne peut gagner à coup sûr de l'argent partant d'une richesse initiale nulle. Notion indépendante du modèle.

Contrat à terme : contrat qui impose l'échange de biens à une date ultérieure à la signature suivant un prix fixé par le contrat.

Option : contrat donnant le droit (et pas l'obligation) au détenteur d'acheter un actif à un prix K fixé par le contrat (ce prix est appelé prix d'exercice ou strike) à une ou plusieurs dates possibles fixées par le contrat, on dit alors qu'on exerce l'option. Lorsque la date d'exercice est unique, on parle d'option européenne. Si la date d'exercice est quelconque entre deux dates fixes données, on parlera d'option américaine.

Call-Put : Un call est une option d'achat (i.e. une option donnant droit à son détenteur d'acheter un actif sous-jacent aux prix et dates fixés par le contrat). Réciproquement le put est une option de vente portant sur un seul actif sous-jacent.

Zero-coupon : Un zéro-coupon d'échéance T est un produit financier versant 1 en T . Son prix en t est noté $B(t, T)$. Son nom vient de ce que rien n'est versé avant la maturité.

Nous commençons par un résultat indépendant du modèle d'évolution des prix.

Théorème 1.1.1. Parité Call-Put. *Considérons un Call et un Put européens de prix d'exercice K sur le même actif de maturité T dans un marché liquide en AOA. Alors,*

$$\forall t \leq T, \quad C(t) - P(t) = S(t) - KB(t, T)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C(t) & \text{prix du Call} \\ P(t) & \text{prix du Put} \\ S(t) & \text{prix de l'actif sous-jacent} \end{cases} \quad \text{à l'instant } t.$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $C(t) - P(t) > S(t) - KB(t, T)$ ou encore

$$K + \frac{C(t) - P(t) - S(t)}{B(t, T)} > 0$$

Notons que à la maturité T , on a $C_T = (S_T - K)^+$ et $P_T = (K - S_T)^+$ de sorte que $C_T - P_T = S_T - K$. En utilisant cette formule dans la stratégie de portefeuille suivante :

Stratégie	instant t	instant T
Vente Call à l'instant t	$-C_t$	$-C_T$
Achat Put à l'instant t	P_t	P_T
Achat Actif à l'instant t	S_t	S_T
Achats zéros-coupons à l'instant t	$C_t - P_t - S_t$	$(C_t - P_t - S_t)/B(t, T)$
Valeur (liquidative)	0	$K + (C_t - P_t - S_t)/B(t, T) > 0$

on obtiendrait une opportunité d'arbitrage... De la même façon, on peut montrer que l'inégalité stricte en sens inverse $(C(t) - P(t) - S(t))/B(t, T) + K < 0$ est contradictoire avec l'AOA. ■

Remarque 1.1.1 L'idée de la preuve consiste simplement à construire une opportunité d'arbitrage en vendant les produits les plus chers et en achetant les moins chers.

Remarque 1.1.2 On pourra reprendre le même type de preuve pour montrer que si deux portefeuilles ont les mêmes valeurs à un instant T alors elles ont même valeur en tout temps intermédiaire $0 \leq t \leq T$.

Remarque 1.1.3 Les achats et les ventes à découvert sont possibles. Ce qui explique la valeur négative de la vente du call par exemple. On peut voir une vente à découvert d'un actif donné comme une dette (puisque'on vend un produit qu'on n'a pas). Pour déterminer la valeur de cette dette, il suffit de voir la quantité d'argent nécessaire pour liquider cette dette ; ainsi à un instant t donné, la valeur de cette dette correspondra à acheter le produit sur le marché (au prix C_t) puis à le donner. Sa valeur est donc $-C_t$.

1.2 Formalisme des modèles discrets

Diverses notations et hypothèses

On se place sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec Ω fini, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et on considère une filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

De plus, on suppose que $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. On note $S_n = \begin{pmatrix} S_n^0 \\ \vdots \\ S_n^d \end{pmatrix}$ le vecteur des prix de $d+1$ actifs financiers.

On considère une stratégie de portefeuille $(\phi) = (\phi_n)_{n \geq 0} = \begin{pmatrix} \phi_n^0 \\ \vdots \\ \phi_n^d \end{pmatrix}_{n \geq 0}$ consistant à investir pour tout temps n la quantité ϕ_n^i dans le i -ème actif. La valeur liquidative du portefeuille à l'instant n est donné par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n; S_n \rangle \quad (1.1)$$

On supposera de plus dans toute la suite que (ϕ_n) est un processus prévisible (ϕ_{n+1} est \mathcal{F}_n -mesurable et ϕ_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable).

Actualisation

Par convention, l'actif 0 sera considéré comme un actif sans risque placé à un taux fixe : $S_n^0 = (1+r)^n$ et $\beta_n = (S_n^0)^{-1}$ sera appelé coefficient d'actualisation. Il sera souvent plus commode dans la suite d'exprimer les prix des actifs en prenant l'actif 0 pour numéraire. On pose alors $\tilde{S}_n = S_n/S_n^0$, c'est le vecteur du prix des actifs en prenant pour S_n^0 le numéraire de référence. On dit que \tilde{S}_n^i est le prix de l'actif i actualisé et on remarquera que $\tilde{S}_n^0 = 1$. On notera de même $\tilde{V}_n(\phi) = V_n(\phi)/S_n^0$. D'une façon générale, dans toute la suite on indiquera par un tilde le prix d'un produit du marché en prenant l'actif 0 pour numéraire.

Contrainte d'autofinancement

Parmi les stratégies (ϕ) prévisibles, nous allons particulièrement nous intéresser à celles qui consistent à investir dans les actifs en utilisant la richesse donnée par la valeur actuelle du portefeuille. Plus précisément, on aura la définition suivante

Définition 1.2.1 On dit qu'une stratégie (ϕ) est *autofinancée* ssi pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\langle \phi_n; S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}; S_n \rangle .$$

Cette condition implique qu'on interdit les retraits et les apports d'argent dans le portefeuille. La contrainte d'autofinancement peut se traduire en une contrainte sur la valeur du portefeuille.

Proposition 1.2.2. On a l'équivalence entre les 3 propriétés suivantes :

- i) (ϕ) est une stratégie autofinancée.
- ii) $\forall n \in \{1, \dots, N\}$, $V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j; \Delta S_j \rangle = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j^0 \Delta S_j^0 + \dots + \phi_j^d \Delta S_j^d$.
- iii) $\forall n \in \{1, \dots, N\}$, $\tilde{V}_n(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j; \Delta \tilde{S}_j \rangle = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d$

avec $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$.

Remarque 1.2.1 a) La contrainte d'autofinancement se traduit donc par le fait que $V_n(\phi)$ a les deux expressions : celle donnée en (1.1) et celle donnée en Prop 1.2.2 (ii).

b) Les deux expressions Prop 1.2.2(ii) et (iii) sont très proches mais l'expression (iii) ne fait pas intervenir les quantités investies dans l'actif sans risque (ϕ_n^0) . Ceci vient de ce que $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$. Cette remarque technique servira dans la preuve du Théorème 1.3.2.

DÉMONSTRATION. En écrivant la définition de $V_n(\phi) = \langle \phi_n; S_n \rangle$, on obtient

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) - [\langle \phi_{n+1}; S_{n+1} - S_n \rangle] = \langle \phi_{n+1}; S_n \rangle - \langle \phi_n; S_n \rangle$$

et l'équivalence de (i) et (ii) en découle immédiatement. L'équivalence entre (i) et (iii) se fait de la même manière. ■

Marché viable

Nous avons besoin d'un certain nombre de définitions supplémentaires.

Stratégie admissible : La stratégie (ϕ) est dite *admissible* ssi elle est autofinancée et

$$\forall n \in \{1, \dots, N\}, \quad V_n(\phi) \geq 0.$$

Marché viable : Un marché sera *viable* s'il n'existe pas de stratégie admissible de richesse initiale nulle et donnant en N une richesse positive avec probabilité un et qui n'est pas nulle presque sûrement. Dans de tels marchés, on dit qu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

En gros, s'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, cela veut dire qu'on ne peut gagner à coup sûr de l'argent en partant d'un capital nul. Le lemme suivant montre que s'il existe une opportunité d'arbitrage, le fait d'imposer une valeur de portefeuille positive pour toute date intermédiaire (stratégie admissible) ou non n'est pas déterminant.

Lemme 1.2.3. *Il existe une stratégie **admissible** ϕ de richesse initiale nulle telle que à l'instant N , $V_N(\phi) \geq 0$ \mathbb{P} -p.s et $\mathbb{P}(V_N(\phi) > 0) > 0$ ssi il existe une stratégie autofinancée **non nécessairement admissible** ψ de richesse initiale nulle telle qu'à l'instant N , $V_N(\psi) \geq 0$ \mathbb{P} -p.s et $\mathbb{P}(V_N(\psi) > 0) > 0$.*

DÉMONSTRATION. La preuve est donnée en appendice, elle peut être évitée dans une première lecture. ■

Marché complet

Une option européenne peut être représentée par sa maturité N et une variable aléatoire h positive et \mathcal{F}_N -mesurable représentant le bénéfice (ou payoff) de l'option lorsqu'elle arrive à maturité, on dit aussi que h est le *flux final* de l'option. On notera \hat{h} le payoff actualisé. Une option européenne de maturité N et de payoff h est *simulable* ssi il existe une stratégie de portefeuille admissible telle que la valeur du portefeuille correspondant à l'instant N soit égale à h presque sûrement. On dit alors que cette stratégie *réplique* l'option européenne, (ϕ) est le portefeuille de *réplication* de l'option européenne. Un marché est dit *complet* ssi toute option européenne est simulable.

1.3 Probabilité risque-neutre

La probabilité risque-neutre qui est en général différente de la probabilité historique (celle régissant l'évolution effective des prix observés sur le marché) permet de traduire aisément les notions de marchés viables et complets. Avant de présenter ce théorème, nous aurons besoin d'une définition extrêmement importante en mathématiques financières : les martingales. Leur définition est ici en temps discret ; il y a un équivalent en temps continu que nous verrons dans le chapitre 4.

Définition 1.3.1 MARTINGALES, SOUS-MARTINGALES ET SUR-MARTINGALES- (M_t) est une \mathcal{F} -martingale L_1 si M_n est \mathcal{F}_n -mesurable, $\mathbb{E}|M_n| < \infty$ et

$$\forall \ell \geq k, \quad M_k = \mathbb{E}(M_\ell | \mathcal{F}_k) \tag{1.2}$$

Définition équivalente pour les sous et sur-martingales L_1 où le signe = dans (1.2) est remplacé

- i) par \leq pour les sous-martingales
- ii) par \geq pour les sur-martingales.

Théorème 1.3.2. *i) Un marché est viable ssi il existe une probabilité $\mathbb{P}^* \asymp \mathbb{P}$ telle que les prix actualisés des actifs soient des martingales. Cette probabilité \mathbb{P}^* sera appelée **probabilité risque neutre**. La relation \asymp signifie simplement que \mathbb{P} et \mathbb{P}^* sont absolument continues l'une par rapport à l'autre.*

ii) Un marché viable est complet ssi la probabilité risque neutre est unique.

On traduit ainsi les notions de viabilité et de complétude des marchés par l'existence et l'unicité de la probabilité risque neutre.

1.4 Calcul de la prime d'une option européenne

Nous voyons dans le théorème suivant comment cette probabilité risque-neutre permet d'écrire simplement le prix (aussi appelé la prime) de l'option.

Proposition 1.4.1. *Si le marché est viable, et si la stratégie (ϕ) réplique une option européenne alors la prime de l'option est nécessairement $V_0(\phi) = \mathbb{E}^*[\tilde{h}]$.*

Remarque 1.4.1 La deuxième expression de la prime ne fait pas intervenir le portefeuille de couverture et ne dépend donc que de l'expression du payoff et de la probabilité risque-neutre.

DÉMONSTRATION.

Soit P la prime de l'option. Supposons $P > V_0(\phi)$ alors, la stratégie donnée par le schéma suivant

Stratégie	temps 0	temps N
Achat du portefeuille au temps 0	$V_0(\phi)$	h
Vente de l'option au temps 0	$-P$	$-h$
Acquisition zéros-coupons au temps 0	$P - V_0(\phi)$	$(P - V_0(\phi))/B(0, N)$
Valeur	0	$(P - V_0(\phi))/B(0, N)$

serait une stratégie d'opportunité d'arbitrage ce qui contredit la viabilité du marché. L'inégalité en sens inverse $P < V_0(\phi)$ contredirait de même la viabilité du marché en utilisant la stratégie de portefeuille $(-\phi)$, en achetant l'option et en plaçant le reste en zéros coupons. Les prix des actifs actualisés étant des martingales, on a immédiatement que le prix des portefeuilles $(\tilde{V}_n(\phi))$ l'est aussi ce qui montre que $V_0(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi)) = \mathbb{E}^*(\tilde{h})$ ce qui conclut la preuve en utilisant a). ■

Remarque 1.4.2 Dans le courant de cette preuve, on peut voir que les prix des actifs actualisés étant des martingales, les prix des portefeuilles le sont aussi. C'est une propriété qui sera conservé en temps continu mais moyennant une condition supplémentaire que nous verrons au chapitre 5.

1.5 Points essentiels du chapitre

- a) Bien comprendre les notions d'absence d'opportunité d'arbitrage, les raisonnements sur les stratégies de portefeuille.
- b) L'existence et l'unicité d'une probabilité risque neutre est liée à l'AOA et aux stratégies de portefeuilles autofinancés.
- c) Sous la probabilité risque neutre, le prix des actifs actualisés mais aussi le prix des portefeuilles autofinancés actualisés sont des martingales.
- d) Cela permet de calculer facilement le prix d'une option.

1.6 Un peu d'histoire

Robert Merton. Source : wikipedia.



Robert C. Merton (né le 31 juillet 1944 à New York) est un économiste américain, connu pour avoir appliqué les mathématiques aléatoires en temps continu (Calcul d'Itô) à l'économie, et surtout à l'étude des marchés financiers. Il a reçu avec Myron Scholes le Prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1997 pour sa participation à la découverte du modèle de Black et Scholes de valorisation des options. Il est le fils du sociologue Robert King Merton.

Il a obtenu son doctorat au MIT de Boston, où il a été élève de Paul Samuelson ; il a ensuite été professeur au même MIT et plus tard à l'université de Harvard.

Comme Myron Scholes, il a été dirigeant associé du hedge fund Long Term Capital Management, depuis sa fondation en 1994 à sa spectaculaire quasi-faillite en septembre 1998.

Bien que le père de Robert Merton ne soit pas lié aux mathématiques financières, nous mettons tout de même sa biographie ci-dessous...

Robert King Merton. Source : wikipedia

Robert King Merton, sociologue des américain né à Philadelphie en Pennsylvanie le 4 juillet 1910 et décédé à New York le 23 février 2003. Etudiant à Harvard, il a été l'élève de Pitirim Sorokin et de Talcott Parsons.

Il est le fondateur de la sociologie des sciences. Il se situe juste avant les interactionnistes, et il est tenant d'un fonctionnalisme dit de "moyenne portée".

Il s'est rendu compte que les individus dans une société agissent en fonction d'objectifs grâce à des moyens. Par exemple dans les années 50 aux États-Unis beaucoup d'individus ont comme objectif de s'enrichir mais Merton constate que de nombreux individus n'ont pas les moyens de le faire (manque d'argent, d'éducation ...).

Il constate que ces individus vont alors utiliser des moyens illégaux pour atteindre le but de l'enrichissement personnel ; il les appelle innovateurs même si ceux-ci sont considérés comme des criminels. Il a refusé la connotation morale pour mettre en avant ces individus. En les valorisant, il déplace le problème de la criminalité. L'origine du problème se trouve dans la vie sociale, exemple aux États-Unis l'enrichissement personnel avec des moyens différents selon les individus.

Il est à l'origine de la notion de dysfonction sociale, lorsque les conséquences d'un fait social empêchent le système de s'adapter et risquent de rendre difficile ou impossible son maintien. Par exemple la criminalité urbaine entraîne des conséquences dysfonctionnelles (insécurité, dégradation etc.).

1.A Appendice

1.A.1 Preuve du Lemme 1.2.3

DÉMONSTRATION. \Rightarrow . Il suffit de prendre $\psi = \phi$.

\Leftarrow . Choisissons une stratégie de portefeuille (ψ) de richesse initiale nulle et telle qu'à l'instant N , $V_N(\psi) \geq 0$ et $\mathbb{P}(V_N(\psi) > 0) > 0$. Si $\{k \geq 0; \mathbb{P}(V_k(\psi) < 0) > 0\} = \emptyset$, alors ψ est une stratégie admissible et on peut poser $\phi = \psi$. Sinon $n = \sup\{k \geq 0; \mathbb{P}(V_k(\psi) < 0) > 0\}$. On choisit pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\phi_k^j = \psi_k^j \mathbf{1}\{k > n\} \mathbf{1}\{\tilde{V}_n(\psi) < 0\}.$$

Nous choisissons la première composante $(\phi_k^0)_{k \geq 0}$ de sorte que la condition d'autofinancement pour tout temps k soit respectée $\langle \phi_k; \tilde{S}_k \rangle = \langle \phi_{k+1}; \tilde{S}_k \rangle$ en posant que la richesse initiale $V_0(\phi)$ est nulle. Il est clair que (ϕ) est bien une stratégie de portefeuille (ϕ est clairement un processus prévisible) qui de plus est autofinancée. Enfin, nous avons clairement

$$\tilde{V}_m(\phi) = \sum_{k=1}^m \langle \phi_k; \Delta \tilde{S}_k \rangle = \sum_{k=1}^m \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d = [\tilde{V}_m(\psi) - \tilde{V}_n(\psi)] \mathbf{1}\{m > n\} \mathbf{1}\{\tilde{V}_n(\psi) < 0\}$$

qui est toujours positif puisque $\tilde{V}_m(\psi) \geq 0$ pour $m \geq n$. Donc ϕ est une stratégie admissible. De plus, on a, par l'égalité précédente en $m = N$, l'implication

$$\tilde{V}_n(\psi) < 0 \Rightarrow \tilde{V}_N(\phi) > 0$$

Ce qui montre alors que $\mathbb{P}(\tilde{V}_N(\phi) > 0) \geq \mathbb{P}(\tilde{V}_n(\psi) < 0) > 0$. Ce qui achève la preuve. \blacksquare

1.A.2 Preuve du Théorème 1.3.2

Preuve de a)

\Leftarrow Si (ϕ) est une stratégie d'arbitrage de richesse initiale nulle, alors en utilisant que $\tilde{V}_n(\phi)$ est une \mathbb{P}^* -martingale,

$$0 = V_0(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi))$$

donc on ne peut avoir que $V_N(\phi)$ est positif presque sûrement et strictement positif avec probabilité strictement positive. Donc le marché est viable.

\Rightarrow . Soit $\begin{pmatrix} \phi^1 \\ \vdots \\ \phi^d \end{pmatrix}$ un processus prévisible quelconque. Choisissons le processus (ϕ^0) de sorte que la condition

d'autofinancement avec une richesse initiale $V_0(\phi) = 0$ soit respectée. On a alors

$$\tilde{V}_n(\phi) = \sum_{k=1}^n \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d. \quad (1.3)$$

Alors, posons $H = \{\tilde{V}_N(\phi); (\phi) \text{ est un processus autofinancé et } V_0(\phi) = 0\}$. En notant que toute variable aléatoire \mathcal{F}_N -mesurable sur l'espace Ω fini peut être représentée par un vecteur de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$, on a que H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ différent de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ puisque d'intersection vide avec les v.a. positives non nulles par viabilité du marché. De plus, en notant $K = \{X \in \mathbb{R}^{|\Omega|} / X(\omega) \geq 0, \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$, K est un convexe compact et H un sous espace vectoriel d'intersection vide avec K , il existe donc un vecteur u tel que

$$\begin{cases} \sum_{\omega} u(\omega) y(\omega) = 0 & \text{si } y \in H \\ \sum_{\omega} u(\omega) y(\omega) > 0 & \text{si } y \in K \end{cases}$$

La deuxième inégalité montre que $\forall \omega \in \Omega$, $u(\omega) > 0$ donc \mathbb{P}^* défini par $\mathbb{P}^*(\{\omega\}) = u(\omega) / (\sum_{\omega' \in \Omega} u(\omega'))$ est bien une probabilité qui de plus est équivalente à \mathbb{P} . De plus, la première égalité montre que

$$\mathbb{E}^* \left[\sum_{k=1}^n \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d \right] = 0$$

Ce qui prouve en choisissant judicieusement les (ϕ_i) que (\tilde{S}_n) est une \mathcal{F}_n -martingale associée à \mathbb{P}^* .

Preuve de b) \Rightarrow . Soit un marché viable et complet. S'il existe deux probabilités \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 telles que les prix des actifs pour ces deux probabilités soient des martingales, alors : pour $i \in 1, 2$ et pour tout fonction h \mathcal{F}_N -mesurable, et choisissant ϕ la stratégie autofinancée répliquant l'option européenne de flux final h et de maturité N , on a

$$\mathbb{E}_i[h/S_N^0] = \mathbb{E}_i[\tilde{V}_N(\phi)] = \mathbb{E}_i[\tilde{V}_0(\phi)] = V_0(\phi)$$

Ainsi en choisissant h une fonction quelconque \mathcal{F}_N -mesurable, il vient que $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

\Leftarrow . Soit un marché viable telle que sous une certaine probabilité \mathbb{P} , les prix des actifs soient des martingales. Alors, notons H le sous espace défini dans la preuve de i). C'est un sous espace vectoriel dont on a vu qu'on peut exhiber un vecteur u satisfaisant

$$\sum_{\omega} u(\omega) y(\omega) = 0 \text{ si } y \in H$$

avec tous les coefficients de u strictement positifs. Montrons que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas, il existerait alors v dans l'orthogonal de H tel que (u, v) est une famille libre, alors, il est clair qu'en choisissant α suffisamment petit, $u + \alpha v$ devient un vecteur orthogonal à H dont les coefficients sont *tous strictement positifs*, on construirait ainsi une probabilité $\mathbb{P}^{**}(\{\omega\}) \sim (u(\omega) + \alpha v(\omega))$ risque neutre pour les prix des actifs. Donc, par l'absurde, H est bien un hyperplan. De plus, H ne contenant pas de

v.a. positive, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ n'est pas dans H . Cela implique que $H \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^{|\Omega|}$. Ce qui im-

plique $H \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \{V + \sum_{k=1}^N \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d; (\phi^1, \dots, \phi^d) \text{ prévisible et } V \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\}$. Si mainte-

nant h est \mathcal{F}_N -mesurable positif, on en déduit une stratégie de portefeuille admissible qui réplique h à l'instant N . Cette stratégie est clairement admissible puisque par propriété de martingale, on a pour tout $n \leq N$,

$$V_n(\phi) = \mathbb{E}^*(V_N | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(h | \mathcal{F}_n) \geq 0$$

Chapitre 2

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein

Sommaire

2.1	Description du modèle	15
2.2	Absence d'Opportunité d'arbitrage	16
2.3	Formule de Black Scholes par l'approximation par arbres	17
2.4	Un peu d'histoire	17
	John Carrington Cox. Source : wikipedia.	17

Mots clés 2.1 Modèle discret, méthodes par arbre, absence d'opportunité d'arbitrage.

Nous considérons dans ce chapitre un modèle de marché très simple avec deux actifs, un actif sans risque et un actif risqué. Cette modélisation connue sous le nom de Cox, Ross et Rubinstein aura le double avantage d'illustrer les résultats obtenus dans le chapitre précédent et d'introduire aux résultats en temps continu par un passage à la limite dans le modèle discret d'arbre. Notamment, les formules de Black Scholes donnant le prix des call et put européens dans un modèle d'évolution des prix très simple seront obtenus dans ce chapitre (sans passer par le calcul stochastique).

2.1 Description du modèle

On considère un marché avec deux actifs :

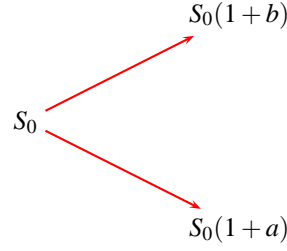
Actif sans risque : L'actif sans risque a pour prix $S_n^0 = (1+r)^n$ à l'instant n .

Actif risqué : L'actif risqué a pour prix $S_n^1 = S_n$ à l'instant n .

On considère qu'à l'instant $n+1$, l'actif peut prendre les deux valeurs possibles $S_{n+1} = S_n(1+a)$ ou $S_{n+1} = S_n(1+b)$ avec $a < b$. On pose alors

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \in \{1+a, 1+b\} \quad \text{avec } -1 < a < b$$

On supposera de plus que le prix initial de l'actif risqué S_0 est connu. On pose alors $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n) = \sigma(T_1, \dots, T_n)$. N représentera un horizon de temps fixé, c'est à dire typiquement la maturité de l'option européenne.



2.2 Absence d'Opportunité d'arbitrage

Proposition 2.2.1. *Il y a AOA (Absence d'Opportunité d'arbitrage) ssi $r \in]a, b[$.*

On sait qu'il y a opportunité d'arbitrage ssi il existe une probabilité risque neutre. Voir Théorème 1.3.2. Nous nous contentons ici de voir comment établir ces résultats de manière très simple dans le cadre des arbres binômiaux.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer simplement que l'AOA implique nécessairement que $r \in]a, b[$. Supposons $r < a$, i.e. $1+r < 1+a$ alors la stratégie de portefeuille suivante

Stratégie	$t = 0$	$t = N$
Achat d'une action à l'instant 0	S_0	$S_N = S_0 \prod_{i=1}^N T_i$
Banque	$-S_0$	$-S_0(1+r)^N$
Valeur du portefeuille	0	$S_0(\prod_{i=1}^N T_i) - (1+r)^N$

impliquerait l'existence d'une opportunité d'arbitrage (puisque $1+a < T_i < 1+b$). D'une façon plus générale, par des raisonnements analogues, on voit qu'une opportunité d'arbitrage serait possible ssi $r \notin]a, b[$. ■

Reprenons maintenant dans ce cadre la construction de la probabilité risque neutre obtenue dans la preuve du Théorème 1.3.2. Pour simplifier, plaçons nous dans le cas où $N = 1$. Toute stratégie de portefeuille $\phi = \begin{pmatrix} -x \\ x/S_0 \end{pmatrix}$ partant de richesse initiale nulle aura à l'instant 1 une valeur $V_1(\phi) = -x(1+r) + xT_1$. Reprenons la démarche de la preuve du Théorème 1.3.2 : T_1 étant une variable aléatoire pouvant prendre les valeurs $1+a$ et $1+b$, on considère le vecteur $\begin{bmatrix} V_1(\phi)|_{T_1=1+a} \\ V_1(\phi)|_{T_1=1+b} \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -(1+r) + 1+a \\ -(1+r) + 1+b \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -r+a \\ -r+b \end{bmatrix}$. La probabilité risque-neutre est donc de la forme $\begin{bmatrix} p \\ 1-p \end{bmatrix}$ orthogonal à $V_1(\phi)$ pour toute stratégie ϕ partant d'une richesse initiale nulle. Nous avons alors la condition

$$p(a-r) + (1-p)(b-r) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{b-r}{b-a}$$

Proposition 2.2.2. *Il existe une unique probabilité risque neutre \mathbb{P}^* avec $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}^{\otimes N}$ et $\mathbb{P}(\{1+a\}) = p$ ssi (\tilde{S}_n) est une (\mathcal{F}) -martingale pour \mathbb{P}^* .*

DÉMONSTRATION. \Rightarrow

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{\tilde{S}_n}{1+r} \mathbb{E}(T_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \frac{\tilde{S}_n}{1+r} [p(1+a) + (1-p)(1+b)] = \tilde{S}_n$$

\Leftarrow . $\mathbb{E}(T_n|\mathcal{F}_{n-1}) = 1+r$. D'où $(1+a)\mathbb{P}(T_n = 1+a|\mathcal{F}_{n-1}) + (1+b)\mathbb{P}(T_n = 1+b|\mathcal{F}_{n-1}) = 1+r$ ce qui donne $\mathbb{P}(T_n = 1+a|\mathcal{F}_{n-1}) = p$ et de plus les (T_i) sont indépendantes. ■

On remarquera ici que dans ce cas très particulier, tout marché viable est donc complet.

Proposition 2.2.3. *Soit c_n (resp. p_n) le prix d'un call (resp. put) européen d'échéance N au temps n . Alors*

$$i) \quad c_n = \sum_{j=0}^{N-n} (1+r)^{n-N} \binom{N-n}{j} p^j (1-p)^{N-n-j} [S_n(1+a)^j (1+b)^{N-n-j} - K]_+$$

$$ii) \quad c_n - p_n = S_n - K(1+r)^{-(N-n)}$$

DÉMONSTRATION. Le ii) est obtenu par relation de parité Call-put. Pour obtenir le i), il suffit de remarquer que

$$c_n = (1+r)^{n-N} \mathbb{E}^* \left(\left(S_n \prod_{i=n+1}^N T_i - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_n \right)$$

■

Proposition 2.2.4. *Le call peut être parfaitement couvert par une stratégie de portefeuille comportant un seul actif risqué en proportion*

$$H_n = \Delta(n, S_{n-1}) = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}$$

2.3 Formule de Black-Scholes par l'approximation par arbres

Proposition 2.3.1. FORMULE DE BLACK AND-SCHOLES- *Si on fait tendre l'échéance N vers l'infini avec les relations :*

$$r = \frac{RT}{N}, \quad \log \frac{1+a}{1+r} = -\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}, \quad \log \frac{1+b}{1+r} = \sigma \sqrt{\frac{T}{N}}$$

Alors le prix du put et du call ont les limites suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} p_0^{(N)} &= Ke^{-RT} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} c_0^{(N)} &= S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-RT} \mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{\log(x/K) + (R + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}; \quad \mathcal{N}(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-x^2/2} dx$$

2.4 Un peu d'histoire

John Carrington Cox. Source : wikipedia.



John Carrington Cox is the Nomura Professor of Finance at the MIT Sloan School of Management. He is one of the world's leading experts on options theory and one of the inventors of the Cox-Ross-Rubinstein model for option pricing, as well as of the Cox-Ingersoll-Ross model for interest rate dynamics.

A leading authority on corporate finance and finance theory, John Cox has developed an intertemporal financial model broad enough to include the fundamental underlying forces affecting financial markets. Using this framework, he has devised a theory of the term structure of interest rates. His bond pricing model is widely used on Wall Street. In the field of contingent claims, Cox has examined the foundations of option valuation. His principle of risk-neutral valuation has become an essential feature of subsequent work on derivatives.

Cox has also developed a simple numerical scheme for valuing American options that is used by most firms dealing in equity derivatives. For many years, his book, *Options Markets*, has been a leading text in the field. In the area of dynamic investment strategies, Cox has studied how best to manage a portfolio over time to meet specific objectives. His work has also examined how the length of the planning horizon affects optimal behavior.

Chapitre 3

Arrêt optimal et options américaines

Sommaire

3.1	Enveloppe de Snell et Pricing d'une option américaine	19
3.2	Le problème de l'arrêt optimal	20
3.3	Approche duale	21
3.4	Couverture et exercice pour les options américaines	21
3.4.1	Couverture de l'option américaine	22
3.4.2	Exercice de l'option américaine	22
3.5	Options américaines et européennes	22
3.6	Points essentiels du chapitre	23
3.7	Un peu d'histoire	23
	Louis Bachelier (1870-1946). Source : wikipedia.	23
3.A	Preuve du Théorème 3.2.1	24
3.B	Preuve de Théorème 3.2.2	24

Mots clés 3.1 Enveloppe de Snell, problème d'arrêt optimal, option américaine.

3.1 Enveloppe de Snell et Pricing d'une option américaine

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on considère une filtration $\mathcal{F}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Rappelons qu'une option américaine est une option pouvant s'exercer à n'importe quelle date entre l'instant de l'achat et un instant N fixé par le contrat. Nous considérerons ici que les temps possibles d'exercice sont les entiers entre 0 et N . Outre les problèmes concernant le pricing de l'option (calcul du prix -ou *prime*- de l'option) et les problèmes de couverture (on cherche un portefeuille de réplication de l'option), nous aurons aussi ici à traiter le moment "optimal" pour exercer l'option ce qui est une problématique nouvelle par rapport aux options européennes.

Considérons une suite (Z_n) \mathcal{F} -adaptée telle que Z_n représente le profit que rapporterait l'exercice de l'option américaine à l'instant n . Rappelons que le tilde sur une quantité à l'instant n , indique que cette quantité est exprimée dans le numéraire associé à l'actif sans risque 0 à l'instant n . Posons

$$\begin{cases} \tilde{U}_N = \tilde{Z}_N; \\ \tilde{U}_n = \max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans le cas particulier où $(\tilde{Z}_n = f(n, X_n))$ et (X_n) est une chaîne de Markov et (\mathcal{F}_n) la filtration engendrée par la chaîne, alors la suite \tilde{U}_n s'exprime aisément sous la forme :

$$\begin{cases} \tilde{U}_N = \tilde{f}(N, X_N); \\ \tilde{U}_n = \max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \tilde{\mathcal{X}}_n)) \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Proposition 3.1.1. (\tilde{U}_n) est la plus petite surmartingale majorant (\tilde{Z}_n) . On dit que (\tilde{U}_n) est l'*enveloppe de Snell* associée à (\tilde{Z}_n) .

DÉMONSTRATION. (\tilde{U}_n) est clairement une surmartingale majorant (\tilde{Z}_n) . Soit maintenant (\tilde{V}_n) est une surmartingale majorant (\tilde{Z}_n) . On a $\tilde{V}_N \geq \tilde{Z}_N = \tilde{U}_N$. De plus, si $\tilde{V}_{n+1} \geq \tilde{U}_{n+1}$ alors

$$\tilde{V}_n \geq \mathbb{E}(\tilde{V}_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

et comme $\tilde{V}_n \geq \tilde{Z}_n$ on tire $\tilde{V}_n \geq \tilde{U}_n$. Ce qui achève la preuve par récurrence descendante. ■

Théorème 3.1.2. Supposons Ω fini, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$. Supposons de plus le marché viable et complet, alors \tilde{U}_0 est la prime de l'option américaine (où (\tilde{U}_n) est la suite définie par les relations (3.1) avec $\mathbb{E} = \mathbb{E}^*$, espérance sous la probabilité risque neutre).

DÉMONSTRATION. Considérons une option américaine et posons \tilde{U}_n son prix actualisé à l'instant n . Montrons que \tilde{U}_n vérifie les relations 3.1. On a clairement $\tilde{U}_N = \tilde{Z}_N$. A l'instant $N-1$, le détenteur de l'option américaine aura le choix récupérer le bénéfice rapporté par l'exercice de l'option à l'instant $N-1$ à savoir \tilde{Z}_{N-1} ou conserver l'option. S'il conserve l'option, l'option américaine devient une option européenne de maturité N de payoff \tilde{Z}_N , sa valeur en $N-1$ est donc par la Proposition 1.3.2, $\mathbb{E}^*(\tilde{U}_N | \mathcal{F}_{N-1})$. Ainsi à l'instant $N-1$, la valeur de l'option est donc $\max(\tilde{Z}_{N-1}, \mathbb{E}^*(\tilde{U}_N | \mathcal{F}_{N-1}))$. Puis, par une simple récurrence descendante, on en déduit que \tilde{U}_0 est bien le prix de l'option à l'instant 0. ■

Nous obtenons donc une expression du prix de l'option américaine. Elle reste relativement inexplicite puisque \tilde{U}_0 apparaît par une récurrence descendante et n'admet pas de formule fermée. Nous allons maintenant donner d'autres expressions de \tilde{U}_0 . Nous commencerons d'abord par définir un problème d'arrêt optimal qui lui est associé.

3.2 Le problème de l'arrêt optimal

Dans cette partie, on ne suppose pas Ω fini. Par homogénéité des notations, nous conserverons ici le tilde bien que cette partie concerne uniquement l'arrêt optimal. Le problème de l'arrêt optimal associé à une suite de v.a. (\tilde{Z}_n) \mathcal{F} -adaptée consiste à trouver un temps d'arrêt ν satisfaisant

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0)$$

où $\tau_{0,N}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. Au vu de cette définition, il n'est pas évident *a priori* que le temps d'arrêt optimal existe bien. Nous considérons l'enveloppe de Snell (\tilde{U}_n) associée à (\tilde{Z}_n) et nous établirons le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. a) ν est un temps d'arrêt optimal ssi $\tilde{U}_\nu = \tilde{Z}_\nu$ et $(\tilde{U}_{\nu \wedge n})$ est une martingale.

b) le temps d'arrêt τ_{\min} , défini par

$$\tau_{\min} = \inf\{n \leq N; \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\} = \inf\{n \leq N; \tilde{Z}_n \geq \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

est un temps d'arrêt optimal. C'est le **plus petit** temps d'arrêt optimal.

c) $\tilde{U}_0 = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0)$.

On notera que τ_{\min} peut aussi s'écrire $\tau_{\min} = \inf\{n \leq N, \tilde{Z}_n \geq \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)\}$. La partie a) fournit une condition nécessaire et suffisante d'optimalité un peu plus explicite que la définition du temps d'arrêt optimal. La partie b) donne un temps d'arrêt optimal (non nécessairement unique). La partie c) donne une écriture de la prime de l'option américaine. On remarquera que le fait que τ_{\min} est le plus petit temps d'arrêt optimal est immédiat à partir de a).

Nous terminons cette partie en exprimant le plus grand temps d'arrêt optimal à l'aide de la décomposition de Doob-Meyer. Suivant la décomposition de Doob, (\tilde{U}_n) étant une surmartingale, il existe une martingale (\tilde{M}_n) et un processus prévisible croissant (A_n) tel que $A_0 = 0$ tel que

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - A_n. \quad (\blacktriangleright \text{DÉCOMPOSITION DOOB-MEYER})$$

Posons

$$\tau_{\max} = \begin{cases} N & \text{si } A_N = 0 \\ \inf\{n \leq N, A_{n+1} \neq 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera que pour tout $n > \tau_{\max}$, $A_n \geq A_{\tau_{\max}+1} > 0$ et donc

$$\forall n > \tau_{\max}, \quad \tilde{U}_n = \tilde{M}_n - A_n < \tilde{M}_n \quad (3.2)$$

Un calcul simple montre que $\tilde{U}_n - \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = A_{n+1} - A_n$. Donc, $\tau_{\max} = \inf\{n \leq N, \tilde{U}_n - \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n] > 0\}$. Ce qui montre en utilisant la définition de U_n donnée en (3.1) que

$$\tau_{\max} = \inf\{n \leq N, \tilde{Z}_n > \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

Théorème 3.2.2. τ_{\max} est le plus grand temps d'arrêt optimal.

On notera bien que $\tau_{\min} \leq \tau_{\max}$ \mathbb{P} -*p.s.* sans qu'il y ait nécessairement égalité. Par contre, un temps d'arrêt τ compris presque sûrement entre τ_{\min} et τ_{\max} n'est pas nécessairement optimal. Néanmoins, dans ce cas $U_{\tau \wedge n} = M_{\tau \wedge n}$ (en effet puisque $\tau \leq \tau_{\max}$, on a pour tout $n \leq \tau$, $A_n = 0$ donc $U_n = M_n$ ce qui s'écrit finalement $U_{\tau \wedge n} = M_{\tau \wedge n}$) qui est donc une martingale (on utilise en fait la propriété que si (M_n) est une martingale et τ un temps d'arrêt, alors, $(M_{\tau \wedge n})$ est une martingale). En vertu du théorème 3.2.1(a), il suffit donc de vérifier que $\tilde{U}_\tau = \tilde{Z}_\tau$ pour que τ soit optimal.

Remarque 3.2.1 Si τ est un temps d'arrêt telle que $\tilde{U}_\tau = \tilde{Z}_\tau$ et $\tau \leq \tau_{\max}$ alors, τ est un temps d'arrêt optimal.

3.3 Approche duale

On trouvera dans la littérature une approche primale-duale qui donne encore une autre expression pour \tilde{U}_0 . On considère que l'approche primale consiste à étudier directement le problème de l'arrêt optimal. L'approche duale est la suivante : Pour toute surmartingale V , on pose :

$$F(t, V) = \mathbb{E}(\sup_{\tau \in \tau_{t,N}} \tilde{Z}_\tau - V_\tau | \mathcal{F}_t) + V_t$$

et on montre que $\inf_V F(0, V)$ où V décrit l'ensemble des surmartingales vaut exactement \tilde{U}_0 . Nous l'écrivons plus précisément dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1.

$$\tilde{U}_0 = \inf\{F(0, V); V \text{ est une } \mathcal{F}\text{-surmartingale}\}$$

DÉMONSTRATION. Posons $W = \inf\{F(0, V); V \text{ est une } \mathcal{F}\text{-surmartingale}\}$ et montrons que $W = \tilde{U}_0$. Comme (\tilde{U}_t) est une surmartingale et $\tilde{Z}_t \leq \tilde{U}_t$, on voit clairement que

$$F(0, \tilde{U}) = \mathbb{E}(\sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \tilde{Z}_\tau - \tilde{U}_\tau | \mathcal{F}_0) + \tilde{U}_0 \leq \tilde{U}_0$$

donc $W \leq \tilde{U}_0$. De plus, pour toute surmartingale V , en notant τ un temps d'arrêt optimal,

$$\tilde{U}_0 = \mathbb{E}(Z_\tau | \mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}(Z_\tau - V_\tau | \mathcal{F}_0) + V_0 \leq F(0, V)$$

D'où $\tilde{U}_0 \leq W$. La preuve est achevée. ■

3.4 Couverture et exercice pour les options américaines

On se replace sous les hypothèses du Théorème 3.1.2.

3.4.1 Couverture de l'option américaine

Une stratégie de couverture pour l'organisme émettant l'option américaine peut être la suivante : soit ϕ la stratégie de portefeuille autofinancée répliquant \tilde{M}_N à l'instant N où (\tilde{M}_N) est la martingale apparaissant dans la décomposition de Doob Meyer de (\tilde{U}_n) . Une telle stratégie existe par hypothèse de complétude du marché puisque \tilde{M}_N est \mathcal{F}_N -mesurable. On a donc

$$\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$$

Comme $(V_N(\phi))$ et (\tilde{M}_N) sont des \mathcal{F} -martingales pour la probabilité \mathbb{P}^* , on en tire que pour tout $n \leq N$

$$\tilde{V}_n(\phi) = \mathbb{E}^*(\tilde{V}_N(\phi) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(\tilde{M}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n \geq \tilde{U}_n \geq \tilde{Z}_n$$

De plus, $\tilde{U}_0 = \tilde{V}_0(\phi)$ ainsi le vendeur de l'option peut se couvrir parfaitement puisque pour chaque instant d'exercice son portefeuille lui rapporte une quantité d'argent $\tilde{V}_n(\phi) = \tilde{M}_n$ qui est plus grande que \tilde{Z}_n .

3.4.2 Exercice de l'option américaine

Nous allons maintenant lier l'instant d'exercice de l'option américaine aux temps d'arrêt optimaux. Plus précisément, nous allons montrer que le détenteur de l'option a intérêt à exercer son option en un temps d'arrêt optimal selon la définition donnée dans le paragraphe précédent.

Proposition 3.4.1. *Si τ le temps d'arrêt correspondant à l'exercice de l'option, alors τ est un temps d'arrêt optimal.*

DÉMONSTRATION. Nous allons prouver successivement :

$$\begin{cases} U_\tau = Z_\tau, \\ (U_{\tau \wedge n}) \text{ est une } \mathcal{F}\text{-martingale pour } \mathbb{P}^*, \end{cases}$$

ce qui permettra ensuite d'appliquer le Théorème 3.2.1(a). Supposons qu'à l'instant n , $\tilde{U}_n > \tilde{Z}_n$. Si l'acheteur exerce l'option à l'instant n alors il perdrait un produit de valeur \tilde{U}_n pour ne récupérer qu'un bénéfice de $\tilde{Z}_n < \tilde{U}_n$. Ce qui constitue une perte du point de vue de l'acheteur. Donc, nécessairement $U_\tau = Z_\tau$.

Maintenant, supposons que l'exercice de l'option a lieu à un instant $\tau > \tau_{\max}$. Alors l'exercice de son option à l'instant $\tau > \tau_{\max}$ lui rapporterait une richesse $\tilde{Z}_\tau \leq \tilde{U}_\tau < \tilde{M}_\tau = \tilde{V}_\tau(\phi)$ (où l'inégalité stricte vient de (3.2)) alors qu'il aurait pu se construire une richesse $\tilde{V}_\tau(\phi)$ en vendant son option à l'instant τ_{\max} au prix $\tilde{U}_{\tau_{\max}}$, puis, s'étant constitué le portefeuille ϕ de prix $\tilde{V}_{\tau_{\max}}(\phi) = \tilde{U}_{\tau_{\max}}$ il suivrait à partir de cet instant la stratégie ϕ ce qui lui rapporterait donc à l'instant τ une richesse $\tilde{V}_\tau(\phi) > \tilde{Z}_\tau$. Ce qui montre que $\tau < \tau_{\max}$. D'où $U_{\tau \wedge n} = M_{\tau \wedge n}$ qui est donc une \mathcal{F} -martingale pour \mathbb{P}^* . ■

3.5 Options américaines et européennes

Nous terminons cette section par quelques propriétés comparées des options américaines et européennes.

Théorème 3.5.1. *Soient*

- A_n la valeur à l'instant n d'une option américaine associée à une suite Z_n ,
- E_n la valeur à l'instant n d'une option européenne de maturité N et rapportant à la maturité Z_N , \mathcal{F}_N -mesurable.

Alors on a les deux propriétés suivantes :

- a) $\forall n \leq N, A_n \geq E_n$.
- b) si $\forall n \leq N, E_n > Z_n$ alors $\forall n \leq N, A_n = E_n$

DÉMONSTRATION. (\tilde{A}_n) étant une \mathcal{F} -surmartingale pour \mathbb{P}^* ,

$$\tilde{A}_n \geq \mathbb{E}(\tilde{A}_N | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\tilde{E}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{E}_n$$

D'où a). La preuve de b) est immédiate en remarquant que (\tilde{E}_n) serait donc une martingale donc une surmartingale majorant \tilde{Z}_n et en appliquant Prop 3.1.1. ■

Exemple : Un call européen a même valeur que le call américain sur le même actif. En effet, notons \tilde{c}_n le prix actualisé du call européen à l'instant n , on a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \mathbb{E}^* \left(\left[\tilde{S}_N - \frac{K}{(1+r)^N} \right]^+ \middle| \mathcal{F}_n \right) \\ &\geq \mathbb{E}^* (\tilde{S}_N | \mathcal{F}_n) - \frac{K}{(1+r)^N} \\ &\geq \tilde{S}_n - \frac{K}{(1+r)^n}\end{aligned}$$

Et comme $x \mapsto x^+$ est croissant, il vient que $\tilde{c}_n \geq \tilde{Z}_n$, ce qui par le théorème précédent montre que les prix des call européens et américains sont les mêmes.

3.6 Points essentiels du chapitre

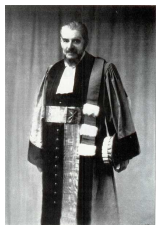
- Nous avons identifié plusieurs expressions différentes du prix de l'option américaine. Certaines sont des sup sur des temps d'arrêt, certaines sont des inf sur des surmartingales. Ceci pourra conduire à des méthodes numériques pour estimer la prime de l'option en terme de borne supérieure et borne inférieure.
- Nous avons montré que l'organisme émettant des options américaines pouvait se couvrir parfaitement avec un portefeuille dont la valeur à chaque instant correspond au terme martingale dans la décomposition de Doob-Meyer du prix de l'option.
- Nous avons montré que l'instant d'exercice de l'option pour l'acheteur devait correspondre à un temps d'arrêt optimal.
- Les temps d'arrêts optimaux sont compris entre τ_{\min} et τ_{\max} . Ces temps d'arrêts ont plusieurs expressions différentes, entre autres, elles peuvent s'écrire

$$\tau_{\min} = \inf\{n \leq N; Z_n \geq \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = \inf\{n \leq N; Z_n > \mathbb{E}[\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n]\}$$

avec la convention que ces temps d'arrêt valent N si ces inf portent sur des ensembles vides.

3.7 Un peu d'histoire

Louis Bachelier (1870-1946). Source : wikipedia.



Louis Bachelier, né au Havre le 11 mars 1870 et mort à Saint-Servan-sur-Mer le 26 avril 1946, est un mathématicien français.

Il est aujourd'hui considéré comme un précurseur de la théorie moderne des probabilités et comme le fondateur des mathématiques financières. Dans sa thèse intitulée *Théorie de la spéculation*, soutenue le 29 mars 1900, il a introduit l'utilisation en finance du mouvement brownien (découvert par Brown, biologiste), qui est à la base de la plupart des modèles de prix en finance, notamment la formule de Black-Scholes (1973).

Ses travaux n'ont pas connu une grande diffusion de son vivant. Benoît Mandelbrot, mathématicien (né en 1924), a été l'un des premiers à rappeler (voir notamment les annexes de son livre *Les Objets fractals*) le rôle de pionnier de Bachelier dans les probabilités et les mathématiques financières.

Son aïeul, Louis Bachelier (Nantes, 1797 - Bordeaux, 1863), avocat et sous-préfet, a publié en 1862 une *Histoire du commerce de Bordeaux depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours* qui fait de lui un économiste référencé dans de nombreuses publications savantes (voir sur Gallica ou sur Google Books la reproduction de ce livre).

Appendice

3.A Preuve du Théorème 3.2.1

Ce théorème est obtenu à partir des trois propositions suivantes que nous démontrons successivement.

Proposition 3.A.1. $\tau_{\min} = \inf\{n; \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\}$ est un temps d'arrêt tel que $\tilde{U}_{\tau_{\min}} = \tilde{Z}_{\tau_{\min}}$ et $(\tilde{U}_{\tau_{\min} \wedge n})$ est une martingale.

Intuitivement, comme $\tilde{U}_n = \max(\tilde{Z}_n, \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n))$, on sent bien que (\tilde{U}_n) se comporte comme une martingale avant l'instant τ_{\min} . La proposition suivante donne une première caractérisation des temps d'arrêts optimaux.

Proposition 3.A.2. Si v est un temps d'arrêt tel que $\tilde{U}_v = \tilde{Z}_v$ et $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ est une martingale alors

a) v est un temps d'arrêt optimal.

b) $\tilde{U}_0 = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0)$.

Ces deux propositions montrent que τ_{\min} est un temps d'arrêt optimal et assure de plus l'égalité $\tilde{U}_0 = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0)$. Cette dernière égalité va nous permettre d'obtenir la réciproque de la proposition 3.A.2.

Proposition 3.A.3. Si v est un temps d'arrêt optimal alors $\tilde{U}_v = \tilde{Z}_v$ et $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ est une martingale.

Passons maintenant aux preuves successives de ces propositions.

DÉMONSTRATION. (Proposition 3.A.1) On a clairement $\tilde{U}_{\tau_{\min}} = \tilde{Z}_{\tau_{\min}}$. De plus,

$$\mathbb{E}(\tilde{U}_{\tau_{\min} \wedge (n+1)} - \tilde{U}_{\tau_{\min} \wedge n} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau_{\min} \geq n+1} (\tilde{U}_{n+1} - \tilde{U}_n) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\tau_{\min} \geq n+1} (\tilde{U}_{n+1} - \mathbb{E}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)) | \mathcal{F}_n] = 0$$

Ce qui montre bien que $(\tilde{U}_{\tau_{\min} \wedge n})$ est une \mathcal{F} -martingale. ■

DÉMONSTRATION. (Proposition 3.A.2) Soit τ un temps d'arrêt à valeur dans $\{0, \dots, N\}$. En utilisant que $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ étant une martingale et $(\tilde{U}_{\tau \wedge n})$ étant une surmartingale (car (\tilde{U}_n) est une surmartingale et τ un temps d'arrêt) :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0 &= \tilde{U}_{v \wedge 0} = \mathbb{E}(\tilde{U}_{v \wedge N} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{U}_v | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_0) \\ \tilde{U}_0 &= \tilde{U}_{\tau \wedge 0} \geq \mathbb{E}(\tilde{U}_{\tau \wedge N} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{U}_\tau | \mathcal{F}_0) \geq \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0) \end{aligned}$$

D'où $\tilde{U}_0 = \mathbb{E}(\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} \mathbb{E}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_0)$. La preuve est achevée. ■

DÉMONSTRATION. (Proposition 3.A.3) Si v est optimal alors, $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ étant une surmartingale,

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_0) = \tilde{U}_0 = \tilde{U}_{v \wedge 0} \geq \mathbb{E}(\tilde{U}_{v \wedge N} | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{U}_v | \mathcal{F}_0)$$

Donc $\mathbb{E}(\tilde{U}_v - \tilde{Z}_v | \mathcal{F}_0) \leq 0$ et $\tilde{U}_v \geq \tilde{Z}_v$ par définition de la suite (U_n) d'où $\tilde{U}_v = \tilde{Z}_v$. On a

$$\tilde{U}_{v \wedge 0} = \tilde{U}_0 = \mathbb{E}(\tilde{Z}_v | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{U}_v | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(\tilde{U}_{v \wedge N} | \mathcal{F}_0)$$

Comme $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ est une surmartingale, l'égalité précédente n'est possible que si $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ est une martingale. ■

3.B Preuve de Théorème 3.2.2

DÉMONSTRATION. (Théorème 3.2.2). Pour montrer l'optimalité de τ_{\max} , nous allons utiliser le Théorème 3.2.1 a). Notons tout d'abord que $\tilde{U}_{\tau_{\max} \wedge n} = M_{\tau_{\max} \wedge n}$ est une martingale car (M_n) l'est. Montrons maintenant que $\tilde{U}_{\tau_{\max}} = \tilde{Z}_{\tau_{\max}}$. Plaçons nous sur l'événement $\tau_{\max} < N$. Notons alors que sur cet événement,

$$\tilde{U}_j = \max(\tilde{Z}_j, \mathbb{E}(\tilde{U}_{j+1} | \mathcal{F}_j)) = \max(\tilde{Z}_j, M_j - A_{j+1}) = \max(Z_j, U_j + A_j - A_{j+1})$$

En utilisant que $A_{\tau_{\max}} - A_{\tau_{\max}+1} < 0$, on en tire que $\tilde{U}_{\tau_{\max}} = \tilde{Z}_{\tau_{\max}}$. Soit v un temps d'arrêt optimal. Alors, par le théorème 3.2.1(a), $(\tilde{U}_{v \wedge n})$ est une martingale et comme $(M_{v \wedge n})$ l'est aussi, on en déduit que $(A_{v \wedge n})$ l'est aussi. Donc

$$0 = A_0 = \mathbb{E}(A_{v \wedge N}) = \mathbb{E}(A_v)$$

(A) étant un processus croissant, on en déduit que $A_v = 0$ p.s. et par suite $v \leq \tau_{\max}$ ■

Chapitre 4

Mouvement brownien et intégrales stochastiques

Sommaire

4.1 Généralités sur les processus à temps continu	25
4.1.1 Quelques définitions	25
4.2 Quelques résultats sur les temps d'arrêt	26
4.3 Le mouvement brownien	26
4.4 Martingale à temps continu	27
4.5 Intégrale stochastique et Calcul d'Itô	29
4.5.1 Calcul d'Ito	31
Processus d'Itô et crochets	31
Formules d'Itô	33
4.5.2 Formule d'Itô multidimensionnelle	34
4.6 Equations différentielles stochastiques	35
4.7 Changement de probabilité. Théorème de Girsanov	36
4.8 Points essentiels du chapitre	37
4.9 Un peu d'histoire	37
Kiyoshi Ito (1915-2008). Source : wikipedia.	37
Wolfgang Doeblin (1915-1940). Source : wikipedia	38

Mots clés 4.1 Martingales, mouvement brownien, intégrale stochastique, formule d'Itô, processus d'Itô, Equation Différentielle Stochastique, Girsanov.

4.1 Généralités sur les processus à temps continu

4.1.1 Quelques définitions

On se donne $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité : i.e. \mathcal{A} est une tribu sur Ω et \mathbb{P} une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

Filtration : $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ est une *filtration* ssi \mathcal{F} est une famille croissante (i.e. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t'}$ pour $t \leq t'$) de sous tribus de \mathcal{A} .

Processus temps continu : (X_t) est un *processus à temps continu* et à valeurs dans (E, \mathcal{E}) ssi pour tout $t \geq 0$, X_t est une v.a. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Processus progressivement mesurable : (X_t) est *progressivement mesurable* ssi $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow E \\ (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \end{cases}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{A}$ -mesurable.

Processus adapté : Si \mathcal{F} est une filtration, (X_t) est \mathcal{F} -adapté si pour tout t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Filtration naturelle : $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$ est la *filtration naturelle* associée au processus (X_t) ssi

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t) \vee \{A \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Temps d'arrêt : τ est un \mathcal{F} -temps d'arrêt ssi τ est une v.a. dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\forall t \geq 0, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Tribu associée à un temps d'arrêt : Si τ est un temps d'arrêt,

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}; \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Martingales, sous-martingales et sur-martingales (M_t) est une \mathcal{F} -martingale L_1 si elle est \mathcal{F} -adapté, $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ et

$$\forall t \geq s, \quad M_s = \mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) \quad (4.1)$$

Définition équivalente pour les *sous et sur-martingales* L_1 où le signe = dans (4.1) est remplacé

- i) par \leq pour les sous-martingales
- ii) par \geq pour les sur-martingales.

En particulier, pour les martingales $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ est une constante... propriété qu'on utilisera souvent par la suite.

Dans tout ce chapitre, tous les processus (X) à temps continu que nous considérerons seront progressivement mesurables. Cela permettra entre autres de considérer des événements s'exprimant à l'aide de toute la trajectoire X_s du processus...

4.2 Quelques résultats sur les temps d'arrêt

L'essentiel des propriétés élémentaires que nous utiliserons sur les temps d'arrêt se résume à cette proposition que nous admettrons :

- Proposition 4.2.1.**
- i) Si τ est un temps d'arrêt, τ est \mathcal{F}_τ -mesurable.
 - ii) Si τ est un temps d'arrêt fini \mathbb{P} -p.s. et X \mathcal{F} -adapté alors X_τ est \mathcal{F}_τ -mesurable.
 - iii) Si τ et τ' sont deux temps d'arrêt tels que $\tau \leq \tau'$ \mathbb{P} -p.s., alors $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau'}$.
 - iv) Si τ et τ' sont deux temps d'arrêt, alors, $\tau \wedge \tau'$ l'est aussi. En particulier pour tout T déterministe, $\tau \wedge T$ est un temps d'arrêt.

4.3 Le mouvement brownien

Dans toute la suite, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_s)$ désignera une filtration sur \mathcal{A} .

Définition 4.3.1 Le processus à valeurs réelles (W_t) est un \mathcal{F} -mouvement brownien ssi (W_t) est un processus à trajectoires continues dont les accroissements sont *indépendants* ($W_t - W_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s pour tout $s \leq t$) et *stationnaires* ($W_t - W_s$ a même loi que $W_{t-s} - W_0$ pour tout $s \leq t$).

Remarque 4.3.1 On peut montrer que si $(W_t)_{t \geq 0}$ est un \mathcal{F} -mouvement brownien alors

$$\text{Pour tout } s \geq 0, (W_{t+s} - W_s)_{t \geq 0} \text{ est un } (\mathcal{F}_{t+s})_{t \geq 0}\text{-mouvement brownien indépendant de } \mathcal{F}_s.$$

Dans la définition du mouvement brownien la loi des accroissement n'est pas précisée. Cependant, on peut montrer (mais c'est un résultat difficile) que les seuls mouvements browniens sont des processus "gaussiens". Plus exactement, nous aurons le théorème suivant :

Théorème 4.3.2. *Si (W_t) est un \mathcal{F} -mouvement brownien alors $W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(rt, \sigma^2 t)$ où r, σ sont des constantes réelles. On dit que c'est un mouvement brownien standard si de plus, $W_0 = 0$, \mathbb{P} -p.s. et si $(r, \sigma) = (0, 1)$.*

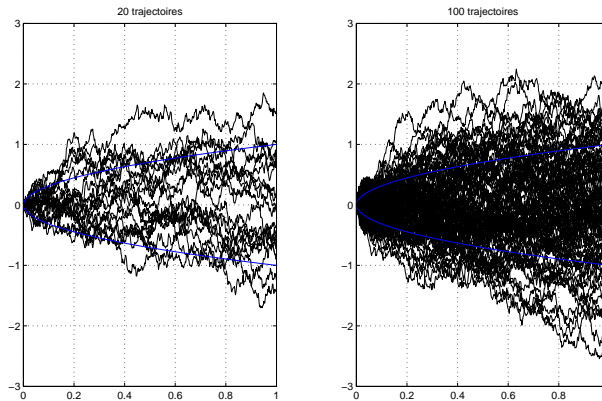


FIGURE 4.1 – Simulation de trajectoires de mouvements browniens : l'écart type de W_t est \sqrt{t}

Théorème 4.3.3. *Soit (W_t) un processus continu. Alors (W_t) est un mouvement brownien standard ssi $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ est un vecteur gaussien de matrice de variance-covariance $[t_i \wedge t_j]_{1 \leq i, j \leq n}$.*

DÉMONSTRATION. \Rightarrow . Par indépendance et stationnarité des accroissements, pour $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ est un vecteur gaussien à composantes indépendantes. Par transformation linéaire, on en déduit donc que $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ est un vecteur gaussien. Il reste à calculer $\text{Cov}(W_{t_i}, W_{t_j})$. Prenons par exemple, $t_i \leq t_j$, alors

$$\text{Cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) = \mathbb{E}(W_{t_i} W_{t_j}) - \underbrace{\mathbb{E}(W_{t_i})\mathbb{E}(W_{t_j})}_0 = \underbrace{\mathbb{E}(W_{t_i}(W_{t_j} - W_{t_i}))}_{\mathbb{E}(W_{t_i})\mathbb{E}(W_{t_j} - W_{t_i})} + \underbrace{\mathbb{E}(W_{t_i}^2)}_{t_i} = t_i$$

\Leftarrow . Pour tout $t, h \geq 0$, $W_{t+h} - W_t$ est une gaussienne centrée de variance $\text{Var}(W_{t+h} - W_t) = \text{Var}(W_{t+h}) + \text{Var}(W_t) - 2\text{Cov}(W_{t+h}, W_t) = t + h + t - 2t = h$. Donc $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}(0, h)$ qui est une loi qui ne dépend pas de t , les accroissements sont stationnaires. De plus, le vecteur des accroissements $(W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ est obtenu par transformation linéaire du vecteur $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ qui est un vecteur gaussien, donc le vecteur des accroissements est aussi gaussien et on sait que pour un vecteur gaussien, ses composantes sont indépendantes ssi leurs covariances sont nulles. Or pour $i < j$,

$$\text{Cov}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) = \text{Cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) - \text{Cov}(W_{t_i}, W_{t_{j-1}}) - \text{Cov}(W_{t_{i-1}}, W_{t_j}) + \text{Cov}(W_{t_{i-1}}, W_{t_{j-1}}) = t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0$$

ce qui achève la preuve. ■

4.4 Martingale à temps continu

Nous commençons par quelques exemples de \mathcal{F} -martingales construites à partir du mouvement brownien standard (W_s) .

Proposition 4.4.1. *Si (W_t) est un mouvement brownien standard alors les processus suivants :*

- i) (W_t)
- ii) $(W_t^2 - t)$

iii) $(\exp(\lambda W_t - (\lambda^2/2)t))$

sont des \mathcal{F} -martingales.

DÉMONSTRATION. Dans tout ce qui suit, on considère $s \leq t$.

i) $\mathbb{E}(W_t - W_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$ donc $\mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s) = W_s$.

ii) On remarque d'abord que $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s)^2 = t - s$. De plus, en développant le terme au carré

$$\mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) + W_s^2 - 2W_s \underbrace{\mathbb{E}(W_t | \mathcal{F}_s)}_{W_s} = \mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) - W_s^2$$

On obtient finalement $\mathbb{E}(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$, ce qui achève la preuve.

iii) Enfin, comme la loi de $W_t - W_s$ conditionnellement à \mathcal{F}_s est une loi normale $\mathcal{N}(0, t - s)$, une propriété connue des variables gaussiennes donne $\mathbb{E}(\exp[\lambda(W_t - W_s)] | \mathcal{F}_s) = e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$. Ce qui assure que $(\exp(\lambda W_t - (\lambda^2/2)t))$ est une \mathcal{F} -martingale. ■

Le théorème suivant est fondamental. On le connaît le plus souvent sous le nom de théorème d'arrêt borné.

Théorème 4.4.2. THÉORÈME D'ARRÊT BORNÉ Si (M_t) est une \mathcal{F} -martingale continue et si $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$ où τ_1 et τ_2 sont des temps d'arrêts bornés, alors

$$M_{\tau_1} = \mathbb{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1})$$

On a le même type de résultat avec des sous-martingales mais dans ce cas, l'égalité = doit être remplacée par l'inégalité \leq . Une première conséquence du théorème d'arrêt est de permettre de construire à partir d'une martingale, d'autres martingales "arrêtées", i.e. arrêtées par un temps d'arrêt...

Théorème 4.4.3. Si (M_t) est une \mathcal{F} -martingale continue et τ un temps d'arrêt alors $(M_{t \wedge \tau})$ est une \mathcal{F} -martingale continue.

DÉMONSTRATION. La continuité est évidente. Fixons nous maintenant $s \leq t$ et cherchons à montrer que $M_{\tau \wedge s} = \mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s)$.

Cela semble une conséquence du théorème d'arrêt borné 4.4.2 puisqu'en posant pour $s \leq t$, avec $\tau_1 = s \wedge \tau$, $\tau_2 = t \wedge \tau$ et $K = t$, on aurait alors

$$M_{\tau \wedge s} = \mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_{\tau \wedge s}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_{\tau \wedge s}) = \mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s)$$

Seulement, la dernière égalité n'est valide que si on a montré au préalable que $\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s)$ est $\mathcal{F}_{\tau \wedge s}$ -mesurable ce qui n'est pas si évident puisque nous avons $\mathcal{F}_{\tau \wedge s} \subset \mathcal{F}_s$ et non le contraire. Prouvons donc que $\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s)$ est $\mathcal{F}_{\tau \wedge s}$ -mesurable et pour cela, remarquons :

$$M_{\tau \wedge t} = M_{\tau \wedge s} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge s < s\}} + M_{\tau \wedge t} \mathbf{1}_{\{\tau \geq s\}}$$

La Proposition 4.2.1 montre que le premier terme à droite de l'égalité est $\mathcal{F}_{\tau \wedge s}$ -mesurable donc \mathcal{F}_s -mesurable. Il reste donc en prenant l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s) = M_{\tau \wedge s} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge s < s\}} + \mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} \mathbf{1}_{\{\tau \geq s\}} | \mathcal{F}_s) = M_{\tau \wedge s} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge s < s\}} + \underbrace{\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s) \mathbf{1}_{\{\tau \wedge s \geq s\}}}_{\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_{\tau \wedge s})}$$

où la dernière égalité vient de ce qu'on a toujours $U_s \mathbf{1}_{\{\tau \geq s\}} = U_{\tau \wedge s} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge s \geq s\}}$. Ainsi $\mathbb{E}(M_{\tau \wedge t} | \mathcal{F}_s)$ s'écrit comme somme de fonctions $\mathcal{F}_{\tau \wedge s}$ -mesurables et est donc par suite $\mathcal{F}_{\tau \wedge s}$ -mesurable, ce qui clôt la preuve. ■

Les temps d'arrêt vont être typiquement pour (M_t) le premier temps d'entrée dans un ensemble ou temps de sortie hors d'un ensemble. Avant cet instant là, on peut imaginer que (M_t) aura certaines propriétés agréables comme d'être borné (si le temps d'arrêt est par exemple le premier temps de sortie hors d'un compact). Le théorème précédent nous permet alors d'utiliser toutes les bonnes propriétés des martingales pour tout ce qui concerne M_t avant le temps d'arrêt (en un sens, la partie la plus informative de la martingale). Pour illustration, voyons comment le théorème d'arrêt permet de calculer par exemple la loi du temps d'atteinte d'un seuil pour un brownien :

Proposition 4.4.4. Soit (W_t) un mouvement brownien. Soit $a \in \mathbb{R}$, posons $\tau_a = \inf\{s \geq 0; W_s = a\}$ avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Alors τ_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement et $\mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_a}) = e^{-\sqrt{2\lambda}|a|}$.

DÉMONSTRATION. L'idée est de prouver que $\mathbb{E} \left[e^{\sqrt{2\lambda}W_{\tau_a} - \lambda\tau_a} \right] = 1$. Le temps d'arrêt τ_a n'étant pas borné, on posera considérera $\tau_a \wedge n$ et on appliquera le théorème d'arrêt 4.4.2. ■

L'idée première pour construire une intégrale sur le brownien $\int_0^1 f(s)dW_s$ serait par exemple de le définir "trajectoire par trajectoire" par la limite d'une somme de Riemann. Malheureusement, quand on veut contrôler les approximations de Riemann, il intervient un terme qui est

$$\sup_{s_0 \leq \dots \leq s_N} \sum_{i=1}^{N-1} |W_{s_{i+1}} - W_{s_i}|$$

Et pour un mouvement brownien, ce terme vaut l'infini avec probabilité un (c'est en fait une propriété "classique" qui nous dit que la trajectoire d'un brownien est presque sûrement de longueur infinie, voir exercice 4.1). Ainsi l'intégrale stochastique ne pourra être définie comme limite presque sûre, trajectoire par trajectoire. Comment faire alors ? L'approche sera non pas de définir l'intégrale trajectoire par trajectoire mais plutôt de regarder directement les limites L_2 des approximations de Riemann, c'est ce point de vue là qui permettra de construire l'intégrale stochastique sur le brownien. Pour finir, nous citons simplement une inégalité "maximale" valable pour des martingales, inégalité qui sous-tend la construction de l'intégrale stochastique.

Théorème 4.4.5. INÉGALITÉ DE DOOB- Si (M_t) est une \mathcal{F} -martingale continue L_2 alors

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2 \right] \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2)$$

EXERCICE 4.1 Soit (W) un mouvement brownien standard. On considère

$$A_N = \sum_{i=1}^N |W_{i/N} - W_{(i-1)/N}|$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(A_N) = \sqrt{N}\mathbb{E}|\xi|$ où $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|A_N - \mathbb{E}(A_N)| > \sqrt{N}\epsilon) \leq \epsilon^{-2}N^{-1}\text{Var}|\xi|$
3. En déduire que $A_N \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty$.

4.5 Intégrale stochastique et Calcul d'Itô

Dans toute cette section (W_s) désignera un \mathcal{F} -mouvement brownien standard.

Notons $\mathcal{H} = \{ (H_t) \text{ processus } \mathcal{F}\text{-adapté, } \mathbb{E} \left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < \infty \}$. Vu la définition de \mathcal{H} , il est naturel de mu-

nir cette espace de la norme $\|H\| = \sqrt{\mathbb{E} \left(\int_0^T H_s^2 ds \right)}$. On admet ce faisant, qu'on construit un espace vectoriel normé complet (toute suite de Cauchy converge), et comme la norme est issue du produit scalaire $\langle H, \tilde{H} \rangle = \mathbb{E} \left(\int_0^T H_s \tilde{H}_s ds \right)$, on dit alors que c'est un *espace de Hilbert*. Formalisons cette hypothèse pour pouvoir y faire référence plus tard :

$$(\mathcal{H}, \| \cdot \|) \text{ est un espace de Hilbert.} \tag{4.2}$$

Cela va avoir plusieurs conséquences. La première est dans le principe même de construction de l'intégrale stochastique : on la définit pour des fonctions H constantes par morceaux qui forme un sous ensemble dense de \mathcal{H} pour la norme $\sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Par une propriété d'isométrie, on montre ensuite que les intégrales stochastiques des fonctions constantes par morceaux forment une suite de Cauchy dans L_2 et on conclut en remarquant que l'espace est complet. Une autre conséquence du caractère "Hilbert" de \mathcal{H} apparaîtra dans la résolution des Equations Différentielles Stochastiques. Nous le verrons plus tard. Passons maintenant aux propriétés essentielles des intégrales stochastiques définies sur des fonctions de \mathcal{H} .

Théorème 4.5.1. Pour tout H dans \mathcal{H} , il existe un processus noté $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$ continue en la variable t et vérifiant de plus,

i) Si $(t_i)_{0 \leq i \leq N}$ désigne une subdivision de $[0, t]$ (i.e. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t$) dont le pas, $\sup_{i=1, \dots, N} |t_i - t_{i-1}|$, tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, alors

$$\sum_{i=1}^N H_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \xrightarrow{L_2, N \rightarrow \infty} \int_0^t H_s dW_s$$

ii) $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale L_2 .

iii) Pour tout $(G, H) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, $i\mathbb{E}[(\int_u^t G_s dW_s)(\int_u^t H_s dW_s)] = \mathbb{E}[\int_u^t G_s H_s ds]$.

iv) $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} |\int_0^t H_s dW_s|^2] \leq 4\mathbb{E}[\int_0^T H_s dW_s]^2$.

Remarque 4.5.1 On notera que la convergence dans i) est dans L_2 et non -p.s., cela signifie en d'autres termes que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^N H_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) - \int_0^t H_s dW_s \right]^2 = 0$$

D'autre part, la propriété iii) est une propriété d'isométrie. La propriété iv) vient de l'inégalité maximale pour les martingales continues L_2 et du fait que $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$ est une \mathcal{F} -martingale (voir ii)).

Remarque 4.5.2 INTÉGRALE DE WIENER- : Un cas particulier important est celui où $H_s = f(s)$ où f est une fonction continue. Alors, $\int_0^t f(s) dW_s$ est obtenue comme limite L_2 de v.a. gaussiennes donc est une v.a. gaussienne. Ainsi, lorsque $H_s = f(s)$ est une fonction déterministe, $\int_0^t f(s) dW_s$ suit une loi normale, ce qui n'est pas le cas en général (i.e pour un H quelconque de \mathcal{H} .)

On pourrait se contenter de définir l'intégrale stochastique sur \mathcal{H} . Malheureusement, (et notamment nous le verrons lorsque nous parlerons de la formule d'Itô), la plupart des fonctions que nous aurons à manipuler ne seront pas dans \mathcal{H} mais plutôt dans l'ensemble plus large de fonctions $\tilde{\mathcal{H}}$ que nous définissons maintenant. Notons $\tilde{\mathcal{H}} = \{(H_t) \text{ processus } \mathcal{F}\text{-adapté, } \int_0^T H_s^2 ds < \infty \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s.}\}$. Evidemment, $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$. Le théorème suivant permet de prolonger la définition de l'intégrale stochastique sur ce nouvel ensemble de fonctions.

Théorème 4.5.2. Pour tout H dans $\tilde{\mathcal{H}}$, il existe un processus $(\int_0^t H_s dW_s)$, continue en la variable t , prolongeant l'intégrale stochastique sur \mathcal{H} et de plus, la propriété de continuité suivante est vérifiée :

Si (H^n) est une suite de processus de $\tilde{\mathcal{H}}$. Alors

$$\left(\int_0^T (H_s^n)^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}}_{n \rightarrow \infty} 0 \right) \implies \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s^n dW_s \right| \xrightarrow{\mathbb{P}}_{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

Définir une intégrale stochastique sur un ensemble de fonctions plus large appelle quelques questions : notamment on peut se demander quelles sont les propriétés sur \mathcal{H} qui sont conservées dans $\tilde{\mathcal{H}}$? La réponse est brutale : aucune des propriétés i-ii-iii-iv du Théorème 4.5.1 ne sont maintenant vérifiées pour des fonctions de $\tilde{\mathcal{H}}$. On peut d'ailleurs remarquer que dans la définition de $\tilde{\mathcal{H}}$, aucun moment d'ordre 2 par rapport à la probabilité \mathbb{P} n'est supposée et c'est donc naturel que les résultats exprimés en moments d'ordre 2, i-iii-iv du Théorème 4.5.1 valables dans \mathcal{H} ne le soient plus dans $\tilde{\mathcal{H}}$. Pour la propriété ii), certes, lorsque $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, le processus $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$ n'est plus une martingale mais il n'en est pas loin... En fait, $(\int_0^t H_s dW_s)$ est une *martingale locale*, c'est à dire qu'il existe une suite de temps d'arrêt, (τ_n) vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \tau_n = \infty$, \mathbb{P} -p.s. i.e. (τ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt tendant vers l'infini.

ii) $(\int_0^{t \wedge \tau_n} H_s dW_s)_{t \geq 0}$ est une martingale.

Si une propriété sur \mathcal{H} est directement issue de la "martingalité" de $(\int_0^t H_s dW_s)$, on peut donc tenter de la prolonger sur $\tilde{\mathcal{H}}$ par l'intermédiaire de la suite de temps d'arrêt τ_n en arguant que $(\int_0^{t \wedge \tau_n} H_s dW_s)$ est une martingale puis on fait tendre n vers l'infini. Une autre façon de ne pas être démuné face aux intégrales stochastiques définies sur $\tilde{\mathcal{H}}$ est de bien comprendre que la propriété de continuité nous assure que toute intégrale stochastique sur $\tilde{\mathcal{H}}$ peut être "approchée" en un certain sens par des intégrales stochastiques définies sur \mathcal{H} . Ce que nous voyons dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.5.3. i) Pour tout H dans $\tilde{\mathcal{H}}$, il existe une suite (H^n) dans \mathcal{H} telle que

$$\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad (4.3)$$

ii) De plus, toute suite (H^n) de \mathcal{H} satisfaisant (4.3) vérifie aussi

$$\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s^n dW_s - \int_0^t H_s dW_s \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

DÉMONSTRATION. Le (ii) est une conséquence de (i) en appliquant le Théorème 4.5.2 où H_s^n a été remplacé par $H_s^n - H_s$. Pour prouver (i), posons par définition $H_s^n = H_s \mathbf{1}_{\{|H_s| \leq n\}}$, il vient alors :

$$\int_0^T (H_s^n - H_s)^2 ds = \int_0^T (H_s)^2 \mathbf{1}_{\{|H_s| > n\}} ds \rightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

par théorème de convergence monotone. Ceci achève la preuve en remarquant que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité. ■

Une remarque importante pour la suite est que si $H \in \mathcal{H}$ alors le processus $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$ est une martingale. Par contre si $H \in \tilde{\mathcal{H}}$, alors on ne peut rien dire quand au caractère martingale ou pas du processus $(\int_0^t H_s dW_s)_{t \geq 0}$.

4.5.1 Calcul d'Ito

Processus d'Itô et crochets

Définition 4.5.4 PROCESSUS D'ITÔ- On suppose les 4 conditions suivantes réunies :

- i) X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable.
- ii) $K = (K_s)$ un processus \mathcal{F} -adapté et $\int_0^T |K_s| ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s.
- iii) $H = (H_s)$ un processus \mathcal{F} -adapté et $\int_0^T (H_s)^2 ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s.
- iv) (W) est un \mathcal{F} -mouvement brownien standard.

On dit que le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un *processus d'Itô* ssi

$$\mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t \leq T, \quad \boxed{X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s} \quad (\blacktriangleright \text{ÉCRITURE INTÉGRALE})$$

ce qu'on note de façon infinitésimale : $\forall t \leq T, \quad \boxed{dX_t = K_t dt + H_t dW_t}$. (► ÉCRITURE DIFFÉRENTIELLE). Dans ce cas, le processus (K_s) sera appelé *drift* de X_t et (H_s) son coefficient de *diffusion* (ou encore, terme de volatilité). De plus, la décomposition de (X_t) à l'aide du triplet $(X_0, (K), (H))$ vérifiant i-ii-iii est **unique**.

On notera que dans la Définition 4.5.11, la condition ii) nous informe que K est intégrable sur $[0, T]$ ce qui permet de définir proprement $\int_0^t K_s ds$. De même la condition iii) signifie que $H \in \tilde{\mathcal{H}}$ ce qui permet de définir proprement l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s dW_s$. Enfin, on remarquera que le fait de supposer X_0 \mathcal{F}_0 -mesurable et les processus K et H \mathcal{F} -adaptés permet d'affirmer que X est \mathcal{F} -adapté. Une autre remarque concerne cette fois-ci la notation infinitésimale dX_t . Elle semble dire qu'on peut définir une intégrale par rapport à dX_t alors qu'on l'avait défini jusqu'à présent par rapport à dW_t . Voyons cela plus précisément dans la remarque ci-dessous :

Remarque 4.5.3 Il est naturel de définir l'intégrale d'un processus G , \mathcal{F} -adapté par rapport au processus d'Itô X par :

$$\int_0^T G_s dX_s = \int_0^T G_s (K_t dt + H_t dW_t) = \int_0^T G_s K_s ds + \int_0^T G_s H_s dW_s$$

C'est effectivement possible à condition de supposer que les deux termes à droite de l'égalité soient bien définies, il faut donc s'assurer que les deux conditions supplémentaires soient remplies :

- i) $\int_0^T |G_s K_s| ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s.

ii) $\int_0^T (G_s H_s)^2 ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s. i.e. $GH \in \tilde{\mathcal{H}}$.

Proposition 4.5.5. Soit X est un processus d'Itô tel que $H \in \mathcal{H}$. Alors, X est une martingale L_2 ssi K_t est le processus nul.

DÉMONSTRATION. Evidemment, si K_t est le processus nul, alors $dX_t = H_t dW_t$ et comme $H \in \mathcal{H}$ il vient directement que X est une martingale L_2 . Il reste à montrer l'implication en sens inverse. Pour cela, supposons que X est une martingale L_2 . On ne démontrera cette implication que pour un processus (K_t) tel que $\mathbb{E} \int_0^t |K_s| ds < \infty$. Alors, comme $\int_0^t K_s ds = \int_0^t dX_s - \int_0^t H_s dW_s$ est différence de deux martingales, c'est encore une martingale. Pour tout $t \geq u$, $\mathbb{E}(\int_u^t K_s ds | \mathcal{F}_u) = 0 = \int_u^t \mathbb{E}(K_s | \mathcal{F}_u) ds$ ce qui donne par dérivation par rapport à t : $\mathbb{E}(K_t | \mathcal{F}_u) = 0$. En prenant $t = u$, il vient puisque K étant \mathcal{F} -adapté, (donc K_t est \mathcal{F}_t -mesurable) $\mathbb{E}(K_t | \mathcal{F}_t) = K_t = 0$ ■

Avant d'énoncer le résultat phare de cette section, à savoir la formule d'Itô, nous allons définir un outil extrêmement important intervenant dans la formule d'Itô : le crochet d'un processus d'Itô.

Définition 4.5.6 COVARIATION QUADRATIQUE OU CROCHET-

i) Soient deux processus d'Itô (X^1) et (X^2) définis sur le même brownien (W) .

$$dX_t^i = K_t^i dt + H_t^i dW_t, \quad (i \in \{1, 2\}).$$

On appelle *covariation quadratique ou crochet* entre X^1 et X^2 le processus noté $\langle X^1, X^2 \rangle$ défini par

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t H_s^1 H_s^2 ds$$

et on note alors $\boxed{d \langle X^1, X^2 \rangle_t = H_s^1 H_s^2 ds}$.

ii) Si (X) est un processus d'Itô telle que $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$, la variation quadratique entre X et X sera appelée *crochet* de X .

Il est noté $\langle X \rangle$ et on aura donc $\langle X \rangle_t = \langle X, X \rangle_t$ et $\boxed{d \langle X \rangle_t = d \langle X, X \rangle_t = (H_t)^2 dt}$.

Quelques propriétés immédiates sont issues de ces définitions, elles rapprochent le crochet du produit scalaire sauf que le produit scalaire est par définition un réel tandis que le crochet est un processus... Autre différence notable, contrairement au produit scalaire, si $\langle X, X \rangle = 0$, le processus X n'est pas le processus nul.

Proposition 4.5.7. Soient (X) et (Y) deux processus d'Itô.

1. $\langle X \rangle$ est un processus croissant positif.
2. $\langle X, Y \rangle_t$ est bilinéaire, symétrique. En particulier, $\langle aX, aX \rangle_t = a^2 \langle X, X \rangle_t$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. $\langle X, Y \rangle = \frac{\langle X+Y \rangle - \langle X-Y \rangle}{4}$

La démonstration de cette proposition est laissée au lecteur. La dernière égalité est à rapprocher des identités de polarisation pour le produit scalaire.

Exemple 4.5.1 $\langle W \rangle_t = t$, $\langle \int_0^t K_s ds \rangle_t = 0$, $\langle \int_0^t K_s ds, X \rangle_t = 0$.

Enfin, on admettra le résultat suivant :

Proposition 4.5.8. Si X est un processus d'Itô satisfaisant $X_0 = 0$, $K = 0$ et $H \in \mathcal{H}$ alors le processus

$$(X_t^2 - \langle X \rangle_t)_{t \geq 0} = \left(\left(\int_0^t H_s dW_s \right)^2 - \int_0^t H_s^2 ds \right)_{t \geq 0}$$

est une \mathcal{F} -martingale.

Pour se familiariser avec l'utilisation du crochet, nous allons par exemple montrer à l'aide de cet outil, l'unicité de la décomposition d'Itô. Soit donc (X_t) un processus d'Itô admettant les deux décompositions suivantes :

$$\forall t \leq T, \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

En faisant $t = 0$, on obtient déjà $X_0 = X'_0$. Il reste alors :

$$\forall t \leq T, \quad 0 = \int_0^t (K_s - K'_s) ds + \int_0^t (H_s - H'_s) dW_s$$

En prenant le crochet du processus nul, on obtient alors à partir de l'expression précédente $\langle 0 \rangle_t = 0 = \int_0^t (H_s - H'_s)^2 ds$. Ce qui donne que $H_s = H'_s$, \mathbb{P} -p.s. et par suite, pour tout $t \leq T$,

$$\int_0^t (K_s - K'_s) ds = 0$$

Par dérivation par rapport à t , on a finalement que $K_s = K'_s$, \mathbb{P} -p.s., ce qui achève la preuve.

Formules d'Itô

Nous avons maintenant tout l'outillage pour énoncer les formules d'Itô que nous admettrons. Pour les rendre plus compactes, nous les exprimerons sous forme différentielle ; cela dit, il faut savoir aussi écrire l'expression intégrale correspondante car elle est couramment utilisée dans la pratique.

Théorème 4.5.9. *i) Soient (X) un processus d'Itô et f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$. Alors,*

$$\forall t \in]0, T[, \quad df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t$$

ii) Soient (X) un processus d'Itô et $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de classe $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ (i.e. de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x). Alors,

$$\forall t \in]0, T[, \quad df(t, X_t) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t$$

ou encore

$$df(t, X_t) = f'_t(t, X_t) dt + f'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t$$

avec des notations évidentes pour f'_t , f'_x et f''_{xx} .

Nous pouvons maintenant comprendre tout l'intérêt d'avoir défini l'intégrale stochastique sur $\tilde{\mathcal{H}}$ au lieu de \mathcal{H} . En effet, le théorème 4.5.9 dit implicitement que $\int_0^T f'(X_t) dX_t$ et $\int_0^T f''(X_t) d\langle X \rangle_t$ sont des quantités bien définies et donc (voir Remarque 4.5.3) que

- i) $\int_0^T |f'(X_t) K_t| dt < \infty$, \mathbb{P} -p.s.
- ii) $\int_0^T (f'(X_t) H_t)^2 dt < \infty$, \mathbb{P} -p.s.
- iii) $\int_0^T |f''(X_t) (H_t)^2| dt < \infty$, \mathbb{P} -p.s.

Ces inégalités sont vraies \mathbb{P} -p.s. puisque, f étant C^2 et $t \mapsto X_t$ continue,

$$\sup_{t \in [0, T]} |f'(X_t)| < \infty, \quad \sup_{t \in [0, T]} |f''(X_t)| < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

et les conditions i-ii-iii dérivent du fait que $\int_0^T |K_t| dt < \infty$ et $\int_0^T (H_t)^2 dt < \infty$, \mathbb{P} -p.s. Si par contre, on avait seulement défini l'intégrale stochastique sur \mathcal{H} , il aurait fallu remplacer ii) par $\mathbb{E} \left[\int_0^T (f'(X_t) H_t)^2 dt \right] < \infty$ en sachant seulement que $\mathbb{E} \left[\int_0^T (H_t)^2 dt \right] < \infty$ et que f est C^2 . Ce qui n'est pas possible sans hypothèse supplémentaire.

Remarque 4.5.4 Si l'on sait que X est à valeurs dans un ouvert U de \mathbb{R} , alors les formules d'Itô sont encore valables pour

- a) $x \mapsto f(x)$ de classe $C^2(U)$ pour i)
- b) $(t, x) \mapsto f(t, x)$ de classe $C^2([0, T] \times U)$ pour ii).

Le sens de cette remarque est de pouvoir utiliser la formule d'Itô pour des fonctions comme $\ln(X_t)$. Evidemment, la fonction \ln n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} mais sur \mathbb{R}^{+*} . Le théorème 4.5.9 ne peut donc s'appliquer directement. Par contre grâce à la remarque 4.5.4, on peut tout de même utiliser une formule d'Itô si l'on sait au préalable que X_t est à valeurs dans \mathbb{R}^{+*} .

4.5.2 Formule d'Itô multidimensionnelle

On va définir ici des processus d'Itô vectoriel, (X_t) où X_t est un vecteur de \mathbb{R}^n définis sur le brownien vectoriel (W_t) où W_t est un vecteur de \mathbb{R}^p . On notera que n et p ne sont pas nécessairement égales. Rien de bien compliqué a priori, mais on fera attention surtout dans cette section à bien repérer dans les notations là où sont les vecteurs et là où sont les matrices.

Définition 4.5.10 Un processus (W) à valeurs dans \mathbb{R}^p est un \mathcal{F} -mouvement brownien p -dimensionnel s'il s'écrit sous la forme $W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ \vdots \\ W_t^p \end{pmatrix}$ où les (W_t^i) sont des \mathcal{F} -mouvements browniens standards indépendants.

Définition 4.5.11 PROCESSUS D'ITÔ- On suppose les 4 conditions suivantes réunies :

- i) X_0 est \mathcal{F}_0 -mesurable à valeurs dans \mathbb{R}^n
- ii) $K = (K_s)$ un processus vectoriel \mathcal{F} -adapté à valeurs dans \mathbb{R}^n et $\int_0^T |K_s| ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s.
- iii) $H = (H_s) = [H_s^{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ un processus matriciel $(n \times p)$, \mathcal{F} -adapté et $\int_0^T (H_s^{i,j})^2 ds < \infty$, \mathbb{P} -p.s. pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$
- iv) (W) est un \mathcal{F} -mouvement brownien p -dimensionnel.

On dit que le processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus d'Itô vectoriel ssi

$$\mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t \leq T, \quad \boxed{X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s} \quad (\blacktriangleright \text{ÉCRITURE INTÉGRALE})$$

ce qu'on note de façon infinitésimale : $\forall t \leq T, \quad \boxed{dX_t = K_t dt + H_t dW_t}$. (\blacktriangleright ÉCRITURE DIFFÉRENTIELLE).

Le crochet avait été défini pour des processus d'Itô sur le même brownien. Ici, la présence de plusieurs browniens nous impose de bien définir le crochet entre deux browniens indépendants : Si W est un \mathcal{F} -mouvement brownien p -dimensionnel (les composantes du browniens sont indépendantes) alors pour tout $i, j \in \{1, \dots, p\}$,

$$\langle W^i, W^j \rangle_t = \mathbf{1}\{i = j\} \times t \quad \text{ou encore} \quad d \langle W^i, W^j \rangle_t = \mathbf{1}\{i = j\} dt \quad (4.4)$$

Notons X^k représente la k -ième composante du processus d'Itô vectoriel (X_t) et remarquons que $dX_t^k = K_t^k dt + \sum_{\ell=1}^p H_s^{k,\ell} dW_s^\ell$. Muni de la règle de calcul du crochet (4.4), nous pouvons alors obtenir la covariation quadratique entre X^i et X^j :

$$d \langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{\ell=1}^p H_t^{i,\ell} H_t^{j,\ell} dt \quad (4.5)$$

La formule d'Itô vectorielle prend alors la forme :

Théorème 4.5.12. Soient (X_t) un processus d'Itô vectoriel :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad dX_t^i = K_t^i dt + \sum_{\ell=1}^p H_s^{i,\ell} dW_s^\ell$$

et $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de classe $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles. Alors,

$$\boxed{\forall t \in]0, T[, \quad df(t, X_t^1, \dots, X_t^n) = \frac{\partial f(t, X_t)}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t, X_t^1, \dots, X_t^n)}{\partial x_i} dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(t, X_t)}{\partial x_i \partial x_j} d \langle X^i, X^j \rangle_t}$$

où l'expression du terme de crochet $d \langle X^i, X^j \rangle_t$ est donnée par (4.5).

Une conséquence importante (pour la pratique) et quasi immédiate (pour la démonstration) de la formule d'Itô vectorielle est l'intégration par parties.

Théorème 4.5.13. Soient (X) et (Y) deux processus d'Itô réel définis sur le même brownien p -dimensionnel. Alors

$$\int_0^T X_t dY_t = [X_t Y_t]_{t=0}^{t=T} - \int_0^T Y_t dX_t - \int_0^T d\langle X, Y \rangle_t$$

DÉMONSTRATION. On pose $f(x, y) = xy$ et on applique la formule d'Itô à f pour le processus $\begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \end{pmatrix}$:

$$df(X_t, Y_t) = \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial x} dX_t + \frac{\partial f(X_t, Y_t)}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t + 2 \frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle_t + \frac{\partial^2 f(X_t, Y_t)}{\partial y^2} d\langle Y \rangle_t \right)$$

Après un calcul rapide des dérivées de f , il reste : $d(X_t Y_t) = Y_t dX_t + X_t dY_t + d\langle X, Y \rangle_t$ ■

4.6 Equations différentielles stochastiques

Une équation différentielle stochastique (EDS) s'écrit sous la forme :

$$X_0 = x, \quad dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \quad (4.6)$$

Définition 4.6.1 Un processus X est solution de l'EDS (4.6) sur $[0, T]$ ssi X un processus \mathcal{F} -adapté satisfaisant

$$\int_0^T |\mu(t, X_t)| dt + \int_0^T \sigma^2(t, X_t) dt < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (4.7)$$

et

$$\forall t \leq T, \quad X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

Remarque 4.6.1 L'EDS (4.6) fait intervenir les termes $\int \mu(t, X_t) dt$ et $\int \sigma(t, X_t) dW_t$. Pour que ces quantités aient bien un sens, il faut donc que $\mu(t, X_t)$ soit bien intégrable et que le processus $(\sigma(t, X_t))_{t \geq 0}$ soit dans $\tilde{\mathcal{H}}$. C'est exactement ce qu'exprime la condition (4.7).

Le théorème suivant révèle des conditions suffisantes sous lesquelles l'EDS (4.6) admet une unique solution dans \mathcal{H} .

Théorème 4.6.2. Si les fonctions $\mu(\cdot, \cdot)$ et $\sigma(\cdot, \cdot)$ satisfont

i) Il existe $K > 0$ tel que pour tout $(t, x, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2$, on ait :

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

ii) Il existe $L > 0$ tel que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, on ait :

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq L(1 + |x|)$$

alors l'EDS (4.6) admet une unique solution dans \mathcal{H} .

La démonstration de ce théorème s'appuie sur un principe de point fixe et s'approche donc de la manière dont est montré l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles.

DÉMONSTRATION. Commençons par l'existence. Nous allons munir \mathcal{H} de la norme $\|\cdot\|_c$ définie par : $\|X\|_c = \sqrt{\mathbb{E}(\int_0^T e^{-ct} X_t^2 dt)}$

pour tout $X \in \mathcal{H}$, où c est un réel positif ou nul. Rappelons nous que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ est un espace de Hilbert où $\|X\| = \sqrt{\mathbb{E}(\int_0^T X_t^2 dt)}$.

$(\mathcal{H}, \|\cdot\|_c)$ sera alors aussi un espace de Hilbert pourvu que les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_c$ soient équivalentes. C'est effectivement le cas puisqu'un calcul élémentaire montre que

$$e^{-cT/2} \|X\| \leq \|X\|_c \leq \|X\|$$

Définissons maintenant la fonction Φ de source dans \mathcal{H} par

$$\forall t \leq T, \quad \Phi(X)_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad (X \in \mathcal{H})$$

La condition ii) permet de montrer que Φ est bien définie (c'est à dire que les intégrales ont bien un sens) et que Φ laisse stable \mathcal{H} , i.e. $\Phi(X) \in \mathcal{H}$ pour $X \in \mathcal{H}$. Nous laissons cette vérification au lecteur pour nous concentrer à présent sur la propriété de contraction de Φ qu'on montrera grâce à la condition i). Plus précisément, on va vérifier que la fonction $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est une application contractante pour la norme $\|\cdot\|_c$ en choisissant c suffisamment grand. On a en utilisant $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ et la condition i) du Théorème 4.6.2,

$$\begin{aligned} \|\Phi(X) - \Phi(Y)\|_c &= \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-ct} [\Phi(X)_t - \Phi(Y)_t]^2 dt \right) \\ &\leq 2 \int_0^T e^{-ct} \mathbb{E} \left(\left[\int_0^t (\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s)) ds \right]^2 \right) dt \\ &\quad + 2 \int_0^T e^{-ct} \mathbb{E} \left(\left[\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)) dW_s \right]^2 \right) dt \\ &\leq 2K^2(T+1) \int_0^T e^{-ct} \mathbb{E} \left(\int_0^t (X_s - Y_s)^2 ds \right) dt \\ &\leq 2K^2(T+1) \mathbb{E} \left(\int_0^T (X_s - Y_s)^2 \left(\int_s^T e^{-ct} dt \right) ds \right) \\ &\leq 2K^2(T+1) \mathbb{E} \left(\int_0^T (X_s - Y_s)^2 e^{-cs} \left(\frac{1 - e^{-c(T-s)}}{c} \right) ds \right) \\ &\leq \frac{2K^2(T+1)}{c} \|X - Y\|_c \end{aligned}$$

En choisissant c suffisamment grand, Φ est une application α -lipschitzienne avec $\alpha < 1$ (on dit alors que Φ est une application contractante) et le théorème du point fixe dans un espace de Hilbert assure alors de l'existence d'une solution. L'unicité est encore une conséquence de la contraction puisque si (X) et (Y) sont deux solutions de l'EDS, ce sont des points fixes de Φ et l'inégalité

$$\|X - Y\|_c = \|\Phi(X) - \Phi(Y)\|_c \leq \alpha \|X - Y\|_c \quad (\alpha < 1)$$

montre que $X = Y$. ■

Quand on abordera les questions d'applications financières, les solutions d'EDP seront typiquement le processus d'évolution des prix d'un actif risqué. Comme indiqué dans le théorème précédent, la solution qu'on obtient en résolvant l'EDS est dans \mathcal{H} . Par contre, comme on s'intéressera à des produits obtenus à partir de cet actif sous jacent, nous aurons à considérer des fonctions $f(X_t)$ ou bien $f(t, X_t)$ avec des bonnes propriétés de régularité pour f et c'est en considérant ces fonctionnelles de X_t finalement qu'on obtient des fonctions de $\tilde{\mathcal{H}}$ et non de \mathcal{H} .

4.7 Changement de probabilité. Théorème de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une probabilité \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{A}) est absolument continue par rapport à \mathbb{P} ssi :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad (\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0)$$

On dit aussi que \mathbb{Q} est dominée par \mathbb{P} .

Théorème 4.7.1. \mathbb{Q} est absolument continue par rapport à \mathbb{P} ssi il existe une variable aléatoire Z positive ou nulle sur (Ω, \mathcal{A}) telle que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

Z est appelée densité de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P} (ou dérivée de Radon Nikodym de \mathbb{Q} par rapport à \mathbb{P}) et est parfois noté $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

De plus, on dira que les probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont *équivalentes* si chacune d'elles est absolument continue par rapport à l'autre. Enfin, si \mathbb{Q} est dominée par \mathbb{P} alors \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont équivalentes ssi $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$.

Théorème 4.7.2. GIRSANOV- Soit $(W_s)_{0 \leq s \leq T}$ un \mathcal{F} -mouvement brownien. Si $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus \mathcal{F} -adapté tel que

$$i) \int_0^T \theta_s^2 ds < \infty, \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

ii) Le processus $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par $Z_t = e^{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds}$ est une \mathcal{F} -martingale L_1 sous \mathbb{P} .

Alors sous la probabilité \mathbb{Q}^Z de densité Z_T par rapport à \mathbb{P} , le processus $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un mouvement brownien standard.

En d'autres termes, le théorème de Girsanov nous apprend que même si le processus $W_t + \int_0^t \theta_s ds$ où l'on "drifte" le brownien W_t d'une quantité $\int_0^t \theta_s ds$ alors, moyennant un changement de probabilité, ce brownien drifté est lui même un brownien. Rappelons que $Z_t = e^{-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds}$ comme dans le Théorème 4.7.2. On a alors les correspondances suivantes entre les probabilités \mathbb{P} et \mathbb{Q}^Z .

Corollaire 4.7.3. Alors, pour variable U \mathcal{F}_T -mesurable,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}(U) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T) \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}(U|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(U \frac{Z_T}{Z_s} \middle| \mathcal{F}_s\right) \quad \forall s \leq T \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En utilisant que (Z_t) est une \mathcal{F} -martingale sous \mathbb{P} ,

$$\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s)}_{=Z_s}} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{Z_s} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(U \frac{Z_T}{Z_s} \middle| \mathcal{F}_s\right)$$

Et donc il suffit de montrer $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}(U|\mathcal{F}_s) = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s)}$. Pour cela, écrivons pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z}\left(\left(U - \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s)}\right) \mathbf{1}_A\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(Z_T \left(U - \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s)}\right) \mathbf{1}_A\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T U|\mathcal{F}_s) \mathbf{1}_A - \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s) \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(UZ_T|\mathcal{F}_s)}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T|\mathcal{F}_s)} \mathbf{1}_A\right] = 0 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu \mathcal{F}_s . ■

4.8 Points essentiels du chapitre

- Nous avons construit l'intégrale stochastique pour des fonctions de \mathcal{H} et $\tilde{\mathcal{H}}$. Il faut bien savoir distinguer si une fonction appartient ou non à \mathcal{H} et quelles sont les propriétés spécifiques à l'intégrale sur \mathcal{H} .
- La formule d'Itô est donnée et il est important d'être à l'aise dans l'utilisation de cette formule (même en multidimensionnelle) et dans le calcul des crochets.
- Nous avons énoncé et démontré un théorème d'existence et unicité des solutions d'une EDS. On remarquera que cette solution est nécessairement dans \mathcal{H} .
- Enfin, nous avons cité le théorème de Girsanov qui, dans les applications financières, nous permettra (voir chapitre suivant) d'exhiber une probabilité (risque neutre) sous laquelle les processus des prix actualisés sont des martingales.

4.9 Un peu d'histoire

Kiyoshi Ito (1915-2008). Source : wikipedia.



Kiyoshi Ito, né le 7 septembre 1915 à Hokusei-Cho- dans la préfecture de Mie au Japon, décédé le 10 novembre 2008 à Kyoto, était un mathématicien japonais.

Kiyoshi Ito a étudié les mathématiques à l'université Impériale de Tokyo. Il y fut attiré par le calcul des probabilités. Il s'intéressa aux travaux d'Andreï Kolmogorov et de Paul Lévy puis plus tard au concept de régularisation étudié par Doob. En 1940, il publia "On the probability distribution on a compact group", un ouvrage important dans l'évolution dans ce domaine. Puis il s'intéressa aux processus stochastiques et au mouvement brownien essentiellement après 1945.

En 1952, il introduisit sa théorie de la probabilité à l'Université de Tokyo. Puis il travailla à la Cornell University et à l'Artuus University.

Il liait les mathématiques aux formes de la beauté et avait cité dans un texte la musique de Mozart, la Cathédrale de Cologne et disait que ces oeuvres avaient inspiré la création de ses formules :

« La musique de Mozart, par exemple, impressionne grandement même ceux qui ne connaissent pas la théorie de la musique, la cathédrale de Cologne subjugué aussi les spectateurs qui ne savent rien de la religion chrétienne. La beauté des structures mathématiques, en revanche, ne peut être appréciée sans comprendre un ensemble de formules qui expriment les lois de la logique. »

C'est cette logique qu'il condensa dans le lemme d'Itô. Il fut lauréat du Prix de Kyoto en 1998 et du Prix Gauss en 2006. Il est mort le 10 novembre 2008 à l'âge de 93 ans.

Wolfgang Doeblin (1915-1940). Source : wikipedia



Wolfgang Döblin alias Wolfgang Doeblin et Vincent Doblin, né à Berlin le 17 mars 1915 et mort à Housseras le 21 juin 1940, était un mathématicien d'origine allemande travaillant en France.

Wolfgang était le deuxième des quatre enfants du médecin et écrivain allemand Alfred Döblin et de son épouse Erna.

Le 28 février 1933, au lendemain de l'incendie du Reichstag, son père, homme de gauche, neuropsychiatre et éminent homme de lettres, auteur de nombreux romans dont Berlin Alexanderplatz., opposant au nazisme, s'enfuit à Zurich suivi de sa femme et de son plus jeune fils.

Wolfgang les rejoint en avril 1933, après avoir passé à Berlin son Abitur (baccalauréat). A l'automne 1933, la famille s'installe en France, tout d'abord à Maisons-Laffitte, puis à partir de décembre 1934 à Paris (14e), au 5, square Henri-Delormel.

À la rentrée universitaire 1933, il reprend ses études supérieures, commencées à Zurich, à la Faculté des sciences de Paris. Il commence à travailler sur la théorie des probabilités en 1935, sous la direction de Maurice Fréchet, à l'Institut Henri Poincaré.

Ses travaux portent sur les chaînes de Markov et il commence à s'intéresser aux processus en temps continu, un domaine alors en plein essor, notamment grâce aux travaux d'Andreï Kolmogorov. Lycéen à Berlin, il était passionné par la politique et par l'économie, domaine lié aux probabilités et aux statistiques.

En octobre 1936, il obtient, avec deux de ses frères et ses parents, la nationalité française. Désormais, il s'appelle souvent « Vincent Doblin ». En tant que mathématicien, il continue de signer « Wolfgang Doeblin ».

Wolfgang Döblin soutient sa thèse sur le sujet des martingales, sujet lié aux chaînes de Markov, en mars 1938, sous la direction de Maurice Fréchet.

Après sa thèse d'État, il est incorporé, en novembre 1938, pour faire son service militaire de deux ans. Refusant, jusqu'au printemps 1940, toute formation d'officier, il reste simple soldat. Malgré ses activités militaires, il réussit à poursuivre son travail, en s'attaquant entre autres à l'équation de Chapman-Kolmogorov, qui est à la base du lien entre la théorie des probabilités et celle des équations aux dérivées partielles. Fin août 1939, il est affecté comme téléphoniste dans le 291e régiment d'infanterie, stationné dans les Ardennes, à Givet, jusqu'en janvier 1940.

Il termine la rédaction de son mémoire Sur l'équation de Kolmogoroff en cantonnement, en Lorraine, et l'envoie sous forme de « pli cacheté » à l'Académie des sciences (pli cacheté 11-668). Il se bat héroïquement sur le front de la Sarre et en Lorraine et est décoré de la croix de guerre.

Après la capitulation de la France et la dislocation de son régiment, il se sépare de ses camarades au col de la Chipotte (Vosges). Il se tue, le 21 juin 1940, dans le village de Housseras, au nord-est d'Épinal, au moment

de l'arrivée d'un groupe d'éclaireurs de la Wehrmacht, par refus de tomber aux mains des Allemands. Inhumé le même jour comme « soldat anonyme ». Il ne sera identifié qu'en 1944.

Ses parents seront enterrés à ses côtés en 1957.

Le pli cacheté 11-668 qu'il envoya à l'Académie des sciences lorsqu'il se trouvait sous les drapeaux, à la mi-février 1940, ne fut ouvert qu'en 2000.

Il contenait des travaux sur la résolution de l'équation de Kolmogorov (théorème démontré indépendamment en 1965), c'est-à-dire des calculs sur la densité de la position d'une particule soumise à des phénomènes de diffusion, mais en utilisant des méthodes trajectorielles sur ces généralisations du mouvement brownien plutôt que des méthodes analytiques. Ces idées, sur lesquelles sont fondées le calcul stochastique ou calcul d'Itô, seront retrouvées indépendamment à partir des années 1940, notamment par le mathématicien Kiyosi Itô.

L'enveloppe du pli cacheté comporte en titre Sur l'équation de Kolmogoroff de W. Doeblin.

Chapitre 5

Modèle de Black and Scholes

Sommaire

5.1	Hypothèses sur le marché	41
5.2	Modélisation probabiliste du marché	41
5.2.1	Résolution de l'EDS de Black and Scholes	42
5.2.2	Changement de probabilité	42
5.2.3	Portefeuille autofinçant	43
5.2.4	Duplication du produit dérivé, EDP d'évaluation	44
5.2.5	Sensibilités	45
5.3	Formules de Black Scholes	45
5.4	Points essentiels du chapitre	46
5.5	Un peu d'histoire	46
	Fischer Black (1938-1995). Source : wikipedia.	46

Mots clés 5.1 EDP d'évaluation, Formules de Black Scholes, les Grecques, le Delta.

5.1 Hypothèses sur le marché

On reprend les hypothèses du début du cours :

- i) Les actifs sont divisibles à l'infini ;
- ii) Le marché est liquide : on peut acheter et vendre à tout instant ;
- iii) On peut emprunter et vendre à découvert ;
- iv) Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
- v) On peut emprunter et prêter au même taux constant r .

5.2 Modélisation probabiliste du marché

On considère un marché constitué d'un actif sans risque noté 0 de prix S_t^0 et d'un seul actif risqué noté 1 de prix $S_t^1 = S_t$ où t désigne le temps qu'on supposera appartenir à l'intervalle $[0, T]$.

Actif sans risque : On suppose que l'actif sans risque suit l'équation d'évolution déterministe : $dS_t^0 = rS_t^0 dt$ avec pour condition initiale : $S_0^0 = 1$. L'équation s'écrit ainsi $d \ln S_t^0 = r dt$ ce qui revient à dire : $S_t^0 = e^{rt}$.

Actif risqué : On suppose que le processus de prix (S_t) de l'actif risqué suit l'EDS dite de Black-Scholes

$$\forall t \in [0, T], \quad dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (5.1)$$

Ceci revient à supposer que le rendement de l'actif risqué suit une loi approchant la loi normale lorsque l'écart de temps est faible : autrement dit, pour $t_{i+1} \approx t_i$,

$$\frac{S_{t_{i+1}} - S_{t_i}}{S_{t_i}} \text{ suit approximativement la loi } \mathcal{N}(\mu(t_{i+1} - t_i), \sigma^2(t_{i+1} - t_i))$$

Quelle va être la tribu \mathcal{F}_t ? Elle représente l'information disponible à la date t et comme l'aléa ne provient que de l'actif risqué, on a nécessairement :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t)$$

La probabilité historique \mathbb{P} est telle que W est un \mathcal{F} -mouvement brownien standard sous \mathbb{P} .

5.2.1 Résolution de l'EDS de Black and Scholes

Théorème 5.2.1. *L'EDS (5.1) admet une unique solution donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$$

DÉMONSTRATION. L'EDS (5.1) s'écrit

$$\forall t \in [0, T], \quad dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad \text{avec} \quad \mu(t, x) = \mu x \text{ et } \sigma(t, x) = \sigma x$$

ce qui est une équation du type (4.6). Les conditions d'existence et d'unicité de solution sont données par le Théorème 4.6.2 et pour vérifier les conditions d'application de ce théorème, il suffit de remarquer que

$$\begin{cases} |\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq (\mu + \sigma)|x - y| \\ |\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq (\mu + \sigma)(1 + |x|) \end{cases}$$

Il existe donc une unique solution de l'EDS (5.1) qui soit dans \mathcal{H} . Pour vérifier qu'elle a la forme donnée par le théorème, posons $S_t = f(t, W_t) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}$ et montrons qu'elle satisfait (5.1). Par la formule d'Itô, f étant C^2 et W un processus d'Itô,

$$dS_t = \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial w} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial w^2} d\langle W \rangle_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t dt$$

La preuve est achevée après simplification de cette équation. ■

La démarche est comme dans le cas discret : on va chercher à donner un prix à un produit dérivé à l'instant t puis à trouver une manière de dupliquer exactement ce produit dérivé. Nous passerons par les étapes suivantes :

- i) On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base actualisé martingale.
- ii) On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille autofinçante.
- iii) On va vérifier que toute stratégie de portefeuille autofinçante actualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre.
- iv) On en déduira l'absence d'opportunité d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple.
- v) Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
- vi) On en déduira que l'expression naturelle du prix de l'option en t s'écrit à un facteur d'actualisation près comme l'espérance sous cette probabilité risque neutre du flux final.
- vii) Le portefeuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option.

5.2.2 Changement de probabilité

On change de numéraire : on exprime le prix des actifs en fonction du prix de l'actif non risqué, on dit aussi qu'on *actualise* les prix :

$$\begin{cases} \tilde{S}_t^0 = \frac{S_t^0}{S_t^0} = 1 \\ \tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = e^{-rt} S_t \end{cases}$$

Par la formule d'Itô, on obtient une EDS pour $\tilde{S}_t = f(t, S_t) = e^{-rt} S_t$:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, S_t)}{\partial S} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, S_t)}{\partial S^2} d\langle S \rangle_t \\ &= -r\tilde{S}_t dt + e^{-rt} dS_t + 0 \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dW_t) \end{aligned}$$

En posant $\lambda = (\mu - r)/\sigma$ (λ est aussi appelée **prime de risque**), on obtient :

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t \quad \text{avec} \quad \hat{W}_t = W_t + \lambda t$$

Pour que l'actif risqué exprimé dans ce numéraire soit une martingale, il suffit donc de montrer que sous une certaine probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ qu'on appellera probabilité risque neutre, (\hat{W}_t) est un mouvement brownien standard. C'est un cas particulier du Théorème de Girsanov : posons

$$Z_t = e^{-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2} t}$$

Il vient par la Proposition 4.4.1 iii) que (Z_t) est une \mathcal{F} -martingale sous \mathbb{P} et on peut alors appliquer le Théorème de Girsanov 4.7.2 avec $\theta_t = \lambda$: l'existence de la probabilité risque neutre est alors assurée. En résumé,

	Probabilité historique	Probabilité risque neutre
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$
Actif risqué actualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t$

5.2.3 Portefeuille autofinçant

Le prix actualisé du sous jacent est donc une \mathcal{F} -martingale. Qu'en est-il de la valeur actualisée d'un portefeuille autofinçant ? Dans un espace fini, ce résultat était vrai sans hypothèse supplémentaire. Il s'avère en temps continu que nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire que nous formaliserons plus précisément dans cette section. Une stratégie de portefeuille (ϕ) consistera ici à détenir

- i) une quantité ϕ_t^0 de l'actif sans risque
- ii) une quantité ϕ_t de l'actif risqué

Dans ces conditions, la valeur (liquidative) du portefeuille est à l'instant t :

$$V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

Exprimé dans le numéraire de l'actif sans risque, la valeur du portefeuille $\tilde{V}_t(\phi) = V_t(\phi)/S_t^0$ sous la condition d'autofinancement s'écrit en temps continu :

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \int_0^t \phi_t d\tilde{S}_t \quad \text{ou encore} \quad d\tilde{V}_t(\phi) = \phi_t d\tilde{S}_t = (\sigma\phi_t \tilde{S}_t) d\hat{W}_t \quad (5.2)$$

Pour que la valeur actualisée du portefeuille sous $\hat{\mathbb{P}}$ soit une martingale, il suffit donc que $\sigma\phi_t \tilde{S}_t \in \mathcal{H}$, ce qui se traduit encore par

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left(\int_0^T \phi_t^2 \tilde{S}_t^2 dt \right) < \infty \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

On traduit cette condition sous forme d'un théorème prolongeant en temps continu ce qui avait déjà été vu en temps discret :

Théorème 5.2.2. *Dans le modèle de Black-Scholes, pour toute stratégie de portefeuille (ϕ) satisfaisant :*

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}} \left(\int_0^T \phi_t^2 \tilde{S}_t^2 dt \right) < \infty \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-p.s.} \quad (5.3)$$

le processus $\tilde{V}_t(\phi)$ (i.e. la valeur actualisée du portefeuille) est une \mathcal{F} -martingale L_2 sous $\hat{\mathbb{P}}$.

5.2.4 Duplication du produit dérivé, EDP d'évaluation

Dans un marché complet, tout produit dérivé (de type européen) est répliquable par une stratégie de portefeuille autofinancée. Si cette stratégie satisfait (5.3) alors la valeur du portefeuille de réplication est une \mathcal{F} -martingale L_2 sous le numéraire de l'actif non risqué et ainsi à tout instant t , par la propriété de réplication, le prix actualisé du produit dérivé est

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(\tilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\frac{h(S_T)}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T) | \mathcal{F}_t)$$

où $h(S_T)$ est le flux final. Ainsi le prix non actualisé du produit dérivé au temps t vaut $e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T) | \mathcal{F}_t)$ et son prix actualisé $e^{-rT} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T) | \mathcal{F}_t)$ est une \mathcal{F} -martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$.

Proposition 5.2.3. EDP D'ÉVALUATION- Soit S une solution de l'EDS de Black-Scholes définie sur $[0, T]$ par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Alors pour toute fonction $h \geq 0$ telle que $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(|h(S_T)|) < \infty$,

- i) Il existe une fonction $(t, x) \mapsto v(t, x)$ telle que $v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T) | \mathcal{F}_t)$. La quantité $v(t, S_t)$ s'interprète donc comme le prix du produit dérivé à l'instant t non actualisé.
- ii) Si de plus, v est $C^{1,2}$ alors le prix du produit dérivé satisfait l'EDP (Eq. aux dériv. partielles) suivante appelé EDP d'évaluation :

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+, \left[-rv + v'_t + rxv'_x + \frac{\sigma^2 x^2}{2} v''_{xx} \right] (t, x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T, x) = h(x)$$

- iii) Le prix de l'option à l'instant 0 est donné par $e^{-rT} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T))$ et la quantité d'actif risqué à détenir dans le portefeuille de réplication est donnée par :

$$\phi_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial x} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

DÉMONSTRATION. On a par le Théorème 5.2.1,

$$S_T = S_t e^{(\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} = S_t e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t)}$$

avec $\hat{W}_T - \hat{W}_t$ v.a. de loi $\mathcal{N}(0, T-t)$ indépendante de \mathcal{F}_t sous $\hat{\mathbb{P}}$. On en tire :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(h(S_T) | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \int h\left(S_t e^{(r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma w}\right) \frac{e^{-\frac{w^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dw = v(t, S_t)$$

Ce qui montre la première partie de la proposition. Les hypothèses de la proposition permettent d'appliquer la formule d'Itô à la fonction $(t, x) \mapsto e^{-rt} v(t, x)$ pour le processus d'Itô S_t , il vient :

$$\begin{aligned} d(e^{-rt} v(t, S_t)) &= \left[-re^{-rt} v(t, S_t) + e^{-rt} v'_t(t, S_t) \right] dt + e^{-rt} v'_x(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} v''_{xx}(t, S_t) d\langle S \rangle_t \\ &= e^{-rt} \left[-rv(t, S_t) + v'_t(t, S_t) + rS_t v'_x(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} v''_{xx}(t, S_t) \right] dt + \underbrace{e^{-rt} S_t v'_x(t, S_t)}_{\hat{S}_t} d\hat{W}_t \end{aligned}$$

où $d\hat{W}_t = dW_t + \frac{\mu-r}{\sigma} dt$. D'autre part, par (5.2), on a $d(e^{-rt} v(t, S_t)) = d\tilde{V}_t(\phi) = (\sigma\phi_t \tilde{S}_t) d\hat{W}_t$, ce qui donne par unicité de la décomposition d'Itô

$$-rv(t, S_t) + v'_t(t, S_t) + rS_t v'_x(t, S_t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} v''_{xx}(t, S_t) = 0, \quad \text{et} \quad v'_x(t, S_t) = \phi_t \quad \hat{\mathbb{P}}\text{-p.s.}$$

Comme $S_t = S_0 e^{(r - \sigma^2/2)t + \sigma\hat{W}_t}$ et $\hat{W}_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, on en déduit que S_t est une v.a. ayant une densité strictement positive sur tout \mathbb{R}^+ et en utilisant l'égalité précédente et le fait que $v \in C^{1,2}$, on tire que $\left[-rv + v'_t + rxv'_x + \frac{\sigma^2 x^2}{2} v''_{xx} \right] (t, x) = 0$ pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$. ■

5.2.5 Sensibilités

Définition 5.2.4 Les sensibilités (dérivées partielles) du prix non actualisé $P_t = v(t, S_t)$ du produit dérivé par rapport à ses différents paramètres sont appelées les *grecques* :

$\Delta_t = v'_x(t, S_t)$: Sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent.

$\theta_t = v'_t(t, S_t)$: Sensibilité du prix par rapport au temps qui s'écoule.

Vega $_t = v'_\sigma(t, S_t)$: Sensibilité du prix par rapport à la volatilité.

$\rho_t = v'_r(t, S_t)$: Sensibilité du prix par rapport au taux d'intérêt.

$\Gamma_t = v''_{xx}(t, S_t) = \Delta'_x(t, S_t)$: Sensibilité du Δ par rapport à la valeur actuelle du sous-jacent.

L'EDP satisfaite par une option vanille se réécrit donc :

$$\left[-rP_t + \theta_t + rx\Delta_t + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \Gamma_t \right] = 0$$

5.3 Formules de Black Scholes

L'utilité de la formule de Black Scholes va se traduire dans les formules qui suivent : ce sont des formules fermées, i.e. explicites, dépendantes d'un seul paramètre non directement observable : la volatilité σ . Deux méthodes sont utilisées dans la pratique pour évaluer σ :

Méthode historique : $\sigma^2 T$ étant la variance de $\ln S_T$, on fait de l'inférence sur σ à partir de l'évolution des cours observés dans le passé.

Méthode implicite : On utilise les prix des call et put obtenus dans les marchés organisés et on "inverse" la formule de Black Scholes, on obtient alors ce qu'on appelle aussi la "volatilité implicite". C'est la méthode la plus utilisée par les praticiens.

Proposition 5.3.1. Dans le cadre du modèle de Black Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est donné par

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

où \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, d_1 et d_2 donnés par

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De plus, le prix du put de maturité T et de strike K est donné de façon équivalente par

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)$$

Et la relation de parité Call-Put : $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$ est respectée.

On peut vérifier (le faire !!) que les sensibilités pour les call et put européens dans le modèle de Black Scholes sont données par le tableau suivant :

Grecques	Call	Put
Δ	$\mathcal{N}(d_1)$	$-\mathcal{N}(-d_1)$
Γ	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1)$
ρ	$TKe^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$	$TKe^{-rT} (\mathcal{N}(d_2) - 1)$
θ	$-\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1) - rKe^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$	$\frac{x\sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_1) + rKe^{-rT} (\mathcal{N}(d_2) - 1)$
Vega	$x\sqrt{T} \mathcal{N}'(d_1)$	$x\sqrt{T} \mathcal{N}'(d_1)$

où l'on a posé par définition :

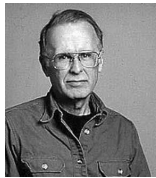
$$\mathcal{N}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du, \quad \text{et} \quad \mathcal{N}'(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

5.4 Points essentiels du chapitre

- a) Dans le modèle de Black Scholes, nous avons donné une expression explicite du prix de l'actif risqué. Nous en avons alors déduit une probabilité risque neutre sous laquelle ce prix actualisé devient une martingale.
- b) Ceci va nous permettre de construire facilement des portefeuilles de réplcation dont les prix actualisés sont encore des martingales sous la probabilité risque neutre.
- c) On en a déduit à la fois, le prix de l'option à tout instant mais aussi le moyen de répliquer cette option par une stratégie de portefeuille autofinancée.
- d) Enfin, nous avons donné le lien entre l'évaluation du prix de l'option et la résolution d'une EDP avec condition terminale ;

5.5 Un peu d'histoire

Fischer Black (1938-1995). Source : wikipedia.



Fischer Black (1938 - 30 août 1995) était un mathématicien américain inventeur, avec Myron Scholes, d'une formule légendaire d'évaluation du prix des actifs financiers.

Fisher Black est titulaire d'un doctorat en mathématiques appliquées de l'université de Harvard en 1964 et devient professeur de Finance à l'université de Chicago en 1971, puis en 1975 à la Sloan School of Management du Massachusetts Institute of Technology.

S'appuyant sur des travaux de Robert Merton, Black est l'auteur, avec Myron Scholes de l'article qui allait, en 1973, révolutionner les mathématiques financières et le mode de fonctionnement des marchés financiers : *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, connu sous le nom de modèle Black-Scholes.

Il mourut avant de pouvoir recevoir le Prix Nobel d'économie, qui fut décerné en 1997 à Scholes et à Merton pour la découverte de ce modèle.

En 1984, il rejoint la banque d'investissement Goldman Sachs.

Bibliographie

- [1] LAMBERTON D. ET LAPEYRE B. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. *Ellipses*.
- [2] HULL J. Options, futures and other derivatives. *Prentice hall*.