Exercice 2. On appelle « boréliens » les ensembles dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; on rappelle que la mesure de Lebesgue Leb est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{Leb}(]a,b[) = b - a$ pour touts réels $a < b$.

1. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.
3. Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que N^c est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on pourra montrer raisonner par l'absurde et considérer $t \in \mathbb{R}$ tel que il existe un voisinage ouvert O de cet élément vérifiant $O \cap N^c = \emptyset$.

Exercice 3 (Tribu engendrée par une fonction)**.** On considère une fonction $X : \Omega \to E$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E, montrer que

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

est une tribu sur Ω.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F, soit un intervalle A et soit $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 6 (Variables exponentielles)**.** Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = -\ln(U)$.

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que X/λ suit une loi exponentielle de paramètre λ. Comparer avec la méthode d'inversion (généralisée) de la fonction de répartition.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $V = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
3. Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable Y a-t-elle une densité ? Pour cette dernière question on pourra montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue alors $t \mapsto \int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 (SIMULATION PAR LA MÉTHODE D'INVERSION). Comment créer des réalisations d'une loi de probabilité donnée à l'aide d'un ordinateur ? Il existe de nombreuses méthodes différentes en fonction de la loi que l'on souhaite simuler. L'ingrédient de base de toutes ces méthodes est un générateur de (pseudo-)variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. En effet, tout bon langage de programmation est équipé d'un tel générateur. Certaines méthodes de simulation consistent à tirer une réalisation de la loi

uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et à appliquer une transformation telle que le résultat suit la loi souhaitée. D'autres méthodes plus complexes nécessitent plusieurs réalisations de la loi uniforme, qui sont combinées de sorte qu'on obtienne une réalisation de la loi souhaitée.

Pour la méthode de simulation dite d'inversion on considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par

$$p \in [0,1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\, F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Montrer en utilisant que F est continue à droite que pour tout $p \in]0,1[$, $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$.
2. Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$ pour tout $p \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, la variable aléatoire $X = F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.
4. Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in]0,1[$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$. En déduire la loi de $F_X(X)$?
6. **Application :** Une épreuve sportive d'entrée pour une certaine école d'ingénieur consiste à mesurer le temps mis pour courir 60 mètres et à transformer ce temps en une note sur 20. Notons X la variable aléatoire indiquant le temps mis par un étudiant pour effectuer ces 60 mètres. Comment feriez vous (théoriquement) pour construire une fonction déterministe F telle que $F(X)$ est à valeur dans $\{0,1,2,\ldots,20\}$ et telle que $\mathbb{P}(F(X)=k) = a_k$ pour $k \in [0:20]$ et où $a_k \geq 0$ avec $\sum_{k=0}^{20} a_k = 1$.

Ex 2 :

1) Mq : $\forall a \in \mathbb{R}$ $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

donc : $]-\infty, a[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
$[a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
$]a, +\infty[\in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow]-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\Big\}$ $]-\infty, a] \cap [a, +\infty[= \{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Autre méthode.

· $\{a\} = \bigcap_{m\geq 1}]a-1/m, a+1/m[$.

Rq : $A \setminus B = A \cap (B^c)$.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la + petite tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

· Rq : $\mathcal{A}$: famille d'ensembles.
$\mathcal{B}$: ________

$$\underbrace{\sigma(\mathcal{A})}_{\text{tribu engendrée par } \mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{B}) \iff \left| \begin{array}{l} \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B}). \\ \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A}). \end{array}\right.$$

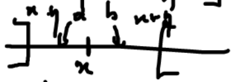
Application : $\mathcal{A} = \{\text{ouverts}\}$. $\mathcal{B} = \{]-\infty, a], a \in \mathbb{Q}\}$.

(i) soit $B =]-\infty, a] \in \mathcal{B}$ alors : $\boxed{B = (]a,+\infty[)^c \in \sigma(\mathcal{A})}$.

(ii) soit C un ouvert (ie : $C \in \mathcal{A}$).

on a : $\boxed{C = \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ ]a,b[\subset C}}]a,b[}$

(en effet : soit $x \in C$,
$\exists \eta > 0$ tq : $]x-\eta, x+\eta[\subset C$.

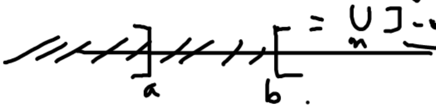


$\exists \left| \begin{array}{l} a \in \mathbb{Q} \cap]x-\eta, x[. \\ b \in \mathbb{Q} \cap]x, x+\eta[\end{array}\right.$

tq : $]a,b[\subset]x-\eta, x+\eta[\subset C$

Donc : $x \in \bigcup_{\substack{a,b\in\mathbb{Q} \\ ]a,b[\subset C}}]a,b[$.

$\forall a,b \in \mathbb{Q}$, $]a,b[= \underbrace{]-\infty, b[}_{= \bigcup_n]-\infty, b-1/n]} \setminus \underbrace{]-\infty, a]} \in \sigma(\mathcal{B})$.



Donc $\boxed{C \in \sigma(\mathcal{B})}$.

Finalement : $\left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{B}). & \Rightarrow & \sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B}). \\ \mathcal{B} \subset \sigma(\mathcal{A}). & \Rightarrow & \sigma(\mathcal{B}) \subset \sigma(\mathcal{A}). \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{B})$.

(b) Soit A un ensemble dénombrable. $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overbrace{\{a_k\}}^{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$. donc : $\boxed{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

Soit λ la mesure de Lebesgue :

$$\lambda(A) = \lambda\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a_k\}\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\lambda(\{a_k\})}_{=0}$$

(en effet $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{a\} = \bigcap_n]a-1/n, a+1/n[$

$\forall n \in \mathbb{N}$. $\{a\} \subset]a-1/n, a+1/n[$.

$\forall n > 0$, $\lambda(\{a\}) \leq \lambda(]a-1/n, a+1/n[) = 2/n$.

donc : $\lambda(\{a\}) = 0$.

donc : $\boxed{\lambda(A) = 0}$.

3) Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et $\lambda(N)=0$.

Mq : N^c dense.

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $\eta>0$, mq : $]x-\eta, x+\eta[$ contient un élément de N^c.

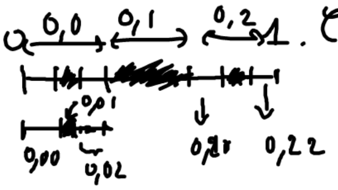
En effet, sinon $]x-\eta, x+\eta[\; \subset N$.

donc : $\underbrace{\lambda(]x-\eta, x+\eta[)}_{} \le \lambda(N)$.

$0 < 2\eta \le \lambda(N)$ impossible.

donc : $\boxed{N^c \text{ dense}}$.

- Rq :



$\mathcal{C}$ = Ensemble triadique de Cantor : on coupe chaque intervalle en 3, on retire l'intervalle ouvert central

$\to \mathcal{C} = \{x \,/\, x=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, a_i = 0 \text{ ou } 2\}$,

où a_i : coeff de x en base 3.

$\lambda(\mathcal{C})=0$ mais $\mathcal{C}$ bijection avec $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ donc avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ donc avec $[0,1]$. $\to$ indénombrable.

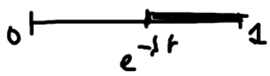
Ex6. $U \sim \text{Unif}\,[0,1]$. On pose $X = -\ln U$.

Loi de $\frac{X}{\lambda}$?

$\frac{X}{\lambda}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (car $\lambda>0$).

De ①, $\forall t \ge 0$, $\mathbb{P}\left(\frac{X}{\lambda} \le t\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{\ln U}{\lambda} \le t\right) = \mathbb{P}(\ln U \ge -\lambda t)$

$= \mathbb{P}(U \ge e^{-\lambda t}) = \int_{e^{-\lambda t}}^1 du = 1 - e^{-\lambda t}$.



$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda u}\, du$.

$= \mathbb{P}(Z \le t)$ où $Z \sim \exp(\lambda)$.

Si $t<0$, $\mathbb{P}\left(\frac{X}{\lambda} \le t\right) = 0$.

Donc : $\boxed{\underbrace{\frac{X}{\lambda}}_{= -\frac{\ln U}{\lambda}} \sim \exp(\lambda).}$

Rq :

. La loi $\exp(\lambda)$ est de densité f où : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.

Posons $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$. ie : $F(x) = 0 \quad \forall x<0$.

et $\forall x>0$, $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$.

$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\,du = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x$.

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = u$

ie : $1-u = e^{-\lambda x} \to \frac{\ln(1-u)}{-\lambda} = x$.

. $F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$ si $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. $\Rightarrow 1-U \sim \mathcal{U}[0,1]$.

Alors : $F^{-1}(U) = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ a pour fonction de répartition F. (donc suit une loi expon.)

2). $X \sim \exp(1)$.

Posons $V = 1 + \lfloor X \rfloor$.

$$\mathbb{P}(V=k) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k-1) = \mathbb{P}(k-1 \leq X < k).$$

$$= \mathbb{P}(X \geq k-1) - \mathbb{P}(X \geq k) \quad (\text{car} : \{X \geq k-1\} = \{k-1 \leq X < k\} \cup \{X \geq k\} \text{ et } \{k-1 \leq X < k\} \cap \{X \geq k\} = \emptyset)$$

$$= e^{-(k-1)} - e^{-k}.$$

$$= e^{-k}(e-1).$$

$$= e^{-(k-1)}(1 - \underbrace{e^{-1}}_{p}) = p^{k-1}(1-p).$$

donc : $V \sim \text{geom}(1-p)$ avec $p = e^{-1}$.

3) $W = \sqrt{X}$

. $\mathbb{P}(W \leq t) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^2) = 1 - e^{-t^2} = G(t)$. $\forall t \geq 0$.

. $\mathbb{P}(W \leq t) = 0 \quad \forall t < 0$.

W a pour densité : $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) . [\underbrace{2t e^{-t^2}}_{G'(t)}]$.

4). $Y = \min(X, a)$.

Y est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, a]$.

$\forall t \in [0, a[$, $\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-t}$

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0. \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \in [0, a[. \\ 1. & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

Rq : $\mathbb{P}(Y = a) = e^{-a} = \underbrace{\overbrace{\mathbb{P}(Y \leq a)}^{1}}_{\lim_{t \to a^+} \mathbb{P}(Y \leq t)} - \overbrace{\lim_{t \to a^-} \mathbb{P}(Y \leq t)}^{1 - e^{-a}} = e^{-a}$.

Rq : Y n'est pas à densité car sinon : $\mathbb{P}(Y = a) = \int \mathbb{1}_a(y) f_Y(y) \, dy = 0$ car : $\lambda(\{a\}) = 0$.

$\underline{\text{Ex 7}}$. $F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} \;/\; F(x) \geq p\}$ $\quad p \in]0,1[$.

$$\lim_{y \to x^+} F(y) = \lim_{y \to x^+} \underbrace{\mathbb{P}(X \leq y)}_{\mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}(X \leq y)}_{\leq 1})} = \mathbb{E}\Big(\underbrace{\lim_{y \to x^+} \mathbb{1}(X \leq y)}_{\mathbb{1}(X \leq x)}\Big) = \underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}$$

$$\lim_{y \to x^-} F(y) = \lim_{y \to x^+} \mathbb{P}(X \leq y)$$

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big)$$

$$\mu\Big(\bigcap_n A_n\Big) = \lim_{n \to +\infty} \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \quad (\text{si } \underline{\mu(A_\phi) < \varphi})$$

$$= \lim_{y \to x^+} \mathbb{E}(\mathbb{1}(X \leq y))$$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\lim_{y \to x^-} \mathbb{1}(X \leq y)}_{\mathbb{1}(X < x)}\Big] = \underbrace{\mathbb{P}(X < x)}$$

Donc : $F(x^+) - F(x^-) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X = x)$.

$$F^{\leftarrow}(p) = \inf \underbrace{\{x \;;\; F(x) \geq p\}}_{A_p}.$$

1. Par définition de $F^{\leftarrow}(p)$.

$\left.\begin{array}{l}\exists (y_n)_{n \geq 0} \text{ tq : } y_n \in A_p \;\forall n. \\ \underline{y_n \downarrow F^{\leftarrow}}(p)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\underline{F(y_n) \geq p}\right\}$ par continuité à droite, $\underline{F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p}$.

2). $\boxed{F^{\leftarrow}(p) \leq x \iff p \leq F(x).}$

($\Rightarrow$) $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ alors : comme $F \nearrow$, $p \underset{\uparrow\,(1)}{\leq} F(F^{\leftarrow}(p)) \leq F(x)$.

($\Leftarrow$) si $p \leq F(x)$. $\quad x \in A_p \Rightarrow x \geq \inf A_p = F^{\leftarrow}(p)$.

(3) Si $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$.

$$\mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

donc : $F^{\leftarrow}(U) \overset{\mathcal{L}}{=} X$.

4) Pour simuler une v.a de $f^{\underline{n}}$ de répartition F, il suffit de :

(1) tirer $U \sim \text{Unif}\,[0,1]$.

(2) Poser : $X = F^{\leftarrow}(U)$

(Alors : X a pour fonction de répartition F).

· Loi exponentielle : voir Exo.1.

5) $\forall u \in]0,1[$, $\quad \mathbb{P}(F(X) \leq u) = \mathbb{P}(\underline{X} \leq F^{\leftarrow}(\underline{u}))$

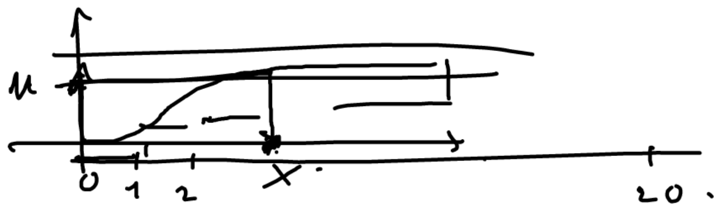
$$= F(F^{\leftarrow}(u)) \underset{(1)}{=} u.$$

(1) vrai car : on sait déjà que : $F(F^{\leftarrow}(u)) \geq u$

Mq : $F(F^{\leftarrow}(u)) \leq u \quad \forall u \in]0,1[$.

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$, $\underline{F^{\leftarrow}(u) - \varepsilon} < \underline{F^{\leftarrow}(u)}$. $\underset{\text{par déf de } F^{\leftarrow}(u)}{\Rightarrow}$ $F(F^{\leftarrow}(u) - \underbrace{\varepsilon}_{\to 0}) < u$ + continuité à gauche de F $\Big\} \Rightarrow F(F^{\leftarrow}(u)) \leq u$.

6)



$G^{\leftarrow}(F(X))$.

v.a. de $F^{\underline{n}}$ de rép. F.