Chap 5. (Théorie ergodique et CM).

$$\mathbb{1}_A \circ T(\omega) = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(\omega)$$

I) Rappel systèmes dynamiques.

Déf. Un système dynamique $\mathcal{D}$ est un quadruplet $\mathcal{D} = (\underbrace{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}}_{\text{espace de probabilité}}, T)$.

où : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de proba.
$T : \Omega \to \Omega$, T est $\mathcal{F}/\mathcal{F}$ mesurable.
et $\boxed{\mathbb{P} = \mathbb{P} \circ T^{-1}!}$ $\iff \forall A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(T^{-1}(A))$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \circ T)$

$\iff \forall h \in F_+(\Omega)$, $\boxed{\mathbb{E}[h] = \mathbb{E}[h \circ T]}$. $(*)$

$F_+(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^+, \text{mesurable}\}$.

Lemme et déf : $I = \{A \in \mathcal{F} / \underbrace{\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ T}\}$ est une tribu, appelée tribu des invariants. Tout ensemble de I est appelé ensemble invariant.

Proof : (i) $\Omega \in I$ (Clair.) $\underbrace{\mathbb{1}_\Omega(\omega)}_{=1} = \mathbb{1}_\Omega(T(\omega))$, $\forall \omega \in \Omega$.

(ii) Si $A \in I$, alors $A^c \in I$.

$\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{A^c}(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(\omega) = 1 - \mathbb{1}_A(T(\omega)) = \mathbb{1}_{A^c}(T(\omega))$.

(iii) Si $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in I$ alors : $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i \in I$.

- $\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i}(\omega) = 1 \iff \forall i \in \mathbb{N}, \omega \in A_i$.
$\iff \forall i \in \mathbb{N}, T(\omega) \in A_i \iff T(\omega) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$
$\iff \forall i \in \mathbb{N}, \omega \in T^{-1}(A_i)$
$\iff \omega \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} T^{-1}(A_i) = T^{-1}(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i)$.
$\iff \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in \mathbb{N}}}(T(\omega)) = 1$.

ie : $\boxed{\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i} = \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i} \circ T.}$

Déf: Soit $D = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ système dynamique.

On dit que D est ergodique ssi. les ensembles invariants sont $\mathbb{P}$-triviaux.

$$\forall A \in \mathcal{I}, \quad \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1.$$

Thm Birkhoff: Soit $D = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ syst. dyn. ergodique. Alors:

$$\forall h \in L_1(\Omega), \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ T^k = \mathbb{E}[h]. \quad \mathbb{P}\text{ p.s.}$$

(1) Typiquement: $\begin{cases} \Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \\ T(\omega) = \omega' \quad \text{où } \omega'_s = \omega_{s+1} \quad (\text{shift}). \end{cases}$ $\omega = (\omega_s)_{s \geq 0}$

$A \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ T.$

typiquement $\left\{ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(\omega_i) = \lambda \right\} = A \in \mathcal{I}$.

(2) si (X_i) suite v.a iid sur un espace de proba $(\mathcal{X}, \mathcal{X}, \mathbb{Q})$.

$$\Omega = \mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{N}}, \quad \mathbb{P} = \mathbb{Q}^{\otimes \mathbb{N}}, \quad T((\omega_s)_{s \geq 0}) = (\omega_{s+1})_{s \geq 0}.$$

$$T(\omega_{0:\infty}) = (\omega_{1:\infty})$$

$[h(\omega_{0:\infty}) = f(\omega_0)$

$$h \circ T^k(\omega_{0:\infty}) = h(\omega_{k:\infty}) = f(\omega_k).$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ T^k(\omega_{0:\infty}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\omega_k) \longrightarrow \mathbb{E}(f(\omega_0)). \quad (\text{LGN variables iid}).$$

$\mathbb{E}[|h|] < \infty$

$= \int |h(\omega_{0:\infty})| \, d\mathbb{P}(\omega_{0:\infty})$

$= \int |f(\omega_0)| \, d\mathbb{P}(\omega_{0:\infty})$

$= \int |f(\omega_0)| \, d\mathbb{Q}(\omega_0) < \infty$

• **Proof:** **Lemme:** Si $\tilde{h} \in L_1(\Omega)$ et $\mathbb{E}[\tilde{h}] > 0$.

Alors: $\varliminf \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h} \circ T^k \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.s.

Lemme: Si $\tilde{h} \in L_1(\Omega)$ et $\mathbb{E}[\tilde{h}] > 0$.

Supposons lemme vrai et montrons Birkhoff. Alors: $\varliminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h} \circ T^k \geq 0$, $\mathbb{P}$-p.s.

Posons: $\tilde{h}_\varepsilon = h \underbrace{- \mathbb{E}[h] + \varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$.

$\tilde{h}_\varepsilon \in L_1(\Omega)$ et $\mathbb{E}[\tilde{h}_\varepsilon] = \varepsilon > 0$. donc: $\varliminf_n \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ T^k\right) - \mathbb{E}[h] + \varepsilon\right] \geq 0$.

(par le lemme).

Donc: $\underbrace{\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k \geqslant \mathbb{E}[h]-\varepsilon}_{(1)}$. $\mathbb{P}$-p.s..

Posons : $\boxed{\tilde{h}_\varepsilon = \mathbb{E}[h] - h + \varepsilon}$. où $\varepsilon > 0$.

$\tilde{h}_\varepsilon \in L_1(\Omega)$ et $\mathbb{E}[\tilde{h}_\varepsilon] = \varepsilon > 0$ donc: (par le lemme) : $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k + \mathbb{E}[h]+\varepsilon\right] \geqslant 0$.

$$\underbrace{-\overline{\lim}_n \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k\right) \geqslant -\mathbb{E}[h]-\varepsilon}_{(2)} \quad , \quad \mathbb{P}\text{.p.s.}$$

Par (1) et (2), on tire: $\mathbb{E}[h]-\varepsilon \underset{(1)}{\leqslant} \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k \leqslant \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k \underset{(2)}{\leqslant} \mathbb{E}[h]+\varepsilon$. $\mathbb{P}$-p.s.

ε étant qcq >0, on obtient. $\mathbb{E}[h] = \underline{\lim} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k = \overline{\lim} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\circ T^k$, $\mathbb{P}$-p.s.

ce qui finit la preuve de Birkhoff.

<u>Montrons.</u>

> <u>Lemme:</u> Si $\tilde{h} \in L_1(\Omega)$. et $\mathbb{E}[\tilde{h}] > 0$.
>
> Alors: . $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}\circ T^k}_{S_n} \geqslant 0$. , $\mathbb{P}$-p.s.

<u>Preuve du lemme:</u> $L_n = \inf\{\underbrace{\tilde{h}}_{S_0}, \underbrace{\tilde{h}+\tilde{h}\circ T}_{S_1}, \dots, \underbrace{\tilde{h}+\tilde{h}\circ T + \dots + \tilde{h}\circ T^n}_{S_n}\}$.

$L_n = \inf_{k=0:n} \{S_k\}$ décroissante. $\qquad S_n \geqslant L_n \geqslant L_\infty$.

$L_\infty = \inf_{k\geqslant 0}\{S_k\} = \lim_{n\to+\infty} L_n \qquad \frac{S_n}{n} \geqslant \frac{L_\infty}{n}$. $\in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$

Mq: $\mathbb{P}(\underbrace{L_\infty = -\infty}_{A}) = 0$. $\qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} \geqslant \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{L_\infty}{n} \geqslant 0$.

$$L_n = \tilde{h} + \inf\{0, \tilde{h}\circ T, \tilde{h}\circ T + \tilde{h}\circ T^2, \dots, \tilde{h}\circ T + \dots + \tilde{h}\circ T^n\}.$$

$$= \tilde{h} + \inf\{0, \underbrace{\inf\{\tilde{h}\circ T, \dots, \tilde{h}\circ T + \dots + \tilde{h}\circ T^n\}}_{L_{n-1}\circ T}\}.$$

$$L_n = \tilde{h} + \inf\{0, L_{n-1}\circ T\} \geqslant \tilde{h} + \inf\{0, L_n\circ T\}.$$

on a : $\mathbb{1}_A L_n \geq \mathbb{1}_A \tilde{h} + \inf\{0, L_n\circ T\} \cdot \mathbb{1}_A$.

donc :

$$\mathbb{1}_A \tilde{h} \leq \mathbb{1}_A L_n - \mathbb{1}_A \cdot \inf\{0, L_n\circ T\}.$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \tilde{h}] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_A L_n] - \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \cdot \inf\{0, L_n\circ T\}] \quad (3).$$

Mq : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ T$, P-p.s.

$$A = \{L_\infty = -\infty\} = \{\inf\{\tilde{h}, \tilde{h} + \tilde{h}\circ T, \tilde{h} + \dots + \tilde{h}\circ T^n, \dots\} = -\infty\}$$

$$A = \{\tilde{h} + \underbrace{\inf\{0, \tilde{h}\circ T, \dots, \tilde{h}\circ T + \dots + \tilde{h}\circ T^n, \dots\}}_{\inf\{0, \inf\{\tilde{h}\circ T, \dots, \tilde{h}\circ T + \dots + \tilde{h}\circ T^n\}\}} = -\infty\}$$

$$A = \underbrace{\{\tilde{h} = -\infty\}}_{B} \cup \{\underbrace{L_\infty\circ T = -\infty}_{\{\omega / T(\omega) \in A\}}\} := B \cup T^{-1}(A).$$

$\mathbb{P}(B) = 0$ car $\mathbb{E}(|\tilde{h}|) < \infty$.

donc : $\boxed{\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}}$

Donc : $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot \inf\{0, L_n\circ T\}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\circ T \times \inf\{0, L_n\circ T\})$

$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \times \inf\{0, L_n\})$ (par la prop. du syst. dynam).

En remplaçant dans (3), il vient :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot \tilde{h}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot L_n) - \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot \inf\{0, L_n\}).$$

$$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A (\underbrace{L_n - \inf\{0, L_n\}}_{L_n^+})).$$

$$\leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_A L_n^+) \longrightarrow 0. \text{ (par converg}^{ce}\text{ dominée).}$$

$$\underbrace{\mathbb{1}_{\{L_\infty = -\infty\}} \cdot L_n^+}_{\leq L_0^+ = \tilde{h} \text{ et } \tilde{h} \in L_1(\Omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc : $\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A \cdot \tilde{h})}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) \times \mathbb{E}(\tilde{h})} \leq 0$. or A est $\mathbb{P}$-trivial. $\mathbb{P}(A) = 1$ ou $\mathbb{P}(A) = 0$.

$\underbrace{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A)}_{0} \times \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{h})}_{>0} \leq 0$. $\longrightarrow$ donc $\mathbb{P}(A) = 0$.

Rq : $A \notin \mathcal{J}$. car : $\underbrace{\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ T}$ $\mathbb{P}$-ps. $\Rightarrow$

$$\boxed{Y = \underbrace{\lim_k \mathbb{1}_A \circ T^k}_{} = \lim_k \underbrace{\mathbb{1}_A \circ T^{k+1}}_{Y \circ T}} \quad \Big| \text{ et } \underline{Y = \mathbb{1}_A \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}}$$

donc : $Y : \Omega \to \Omega$. est $\mathcal{G}/\mathcal{J}$ mesurable. comme $\mathcal{J}$ est $\mathbb{P}$-triviale.

on a que $\underline{Y \text{ est } \mathbb{P}\text{-constante}}$.

donc : $\mathbb{1}_A$ est $\mathbb{P}$-p.s const. et comme $\mathbb{1}_A \in \{0,1\}$.
on tire : $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

II| Application aux chaînes de Markov.

Lemme :
Soit P un noyau de Markov tq : P admet une proba invariante π.
Alors : $D = (\mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}_\pi, S)$. est un système dynamique
où on a posé : $S : \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$.
$\omega \mapsto \omega'$ où $\omega'_k = \omega_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
(S est appelé opérateur de translation),

· $\mathbb{P}_\pi \circ S^{-1} = \mathbb{P}_\pi$. en effet : $\mathbb{P}_{\pi}(\underbrace{X_{0:\infty} \in A}_{\{\omega / \underbrace{X_{0:\infty}(\omega)}_{\omega} \in A\}}) = \mathbb{P}_\pi(\underbrace{A}_{\{\omega / \omega \in A\}})$.

$X_k(\omega) = \omega_k$.

$X_{k:\infty}(\omega) = \omega_{k:\infty}$. car $\underline{\pi P = \pi}$ $\leftarrow$ $\downarrow$

$X_{0:\infty}(\omega) = \omega_{0:\infty} = \omega$.

$\mathbb{P}_\pi(\underbrace{X_{1:\infty} \in A}_{\underbrace{\{\omega / S(\omega) \in A\}}_{S^{-1}(A)}}) = \mathbb{P}_\pi \circ S^{-1}(A)$.

$S(X_{0:\infty}(\omega))$
$= S(\omega) = \omega_{1:\infty} = X_{1:\infty}(\omega)$.

Donc : $\mathbb{P}_\pi(A) = \mathbb{P}_\pi(S^{-1}(A))$.

Thm (*). Si P noyau de Markov, et si P a une unique proba invariante
alors le système dynamique $(\mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathcal{X}^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}_\pi, S)$ est ergodique et donc :
par Birkhoff. $\forall h \in L_1(\mathbb{P}_\pi)$, $h : \mathcal{X}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$.
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h \circ S^k = \mathbb{E}[h], \quad \mathbb{P}_\pi\text{-p.s.}$$

Corollaire 1 : si P a une unique proba invariante et $\pi(|f|) < \infty$ où $f \in \underbrace{\mathbb{F}(\mathbb{X})}_{f : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \text{ mesurable}}$.

Alors ;
$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overbrace{\int f(x)\, \pi(dx)}^{\pi(f)}}_{A} \quad \mathbb{P}_\pi\text{-p.s.}$$

Preuve du corollaire :

on pose : $h(\underset{\omega_{0:\infty}}{\underline{\omega}}) = f(\omega_0)$.

$$\mathbb{E}_\pi(|h|) = \int |h(\omega)|\, d\mathbb{P}_\pi(\omega)$$
$$= \int |f(\omega_0)|\, d\mathbb{P}_\pi(\omega)$$
$$= \int |f(\omega_0)|\, \pi(d\omega_0) < \infty$$

En appliquant Thm $(*)$, $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{h \circ S^k}^{f(X_k)} \to \mathbb{E}_\pi(h) = \int f(\omega_0)\, \pi(d\omega_0)$.

or : $h \circ \underbrace{S^k(\omega)}_{\omega_{k:\infty}} = h(\omega_{k:\infty}) = f(\omega_k) := f \cdot (X_k)(\omega)$.

Corollaire 2 si P est un noyau de Markov ayant π pour $\overset{\text{unique.}}{!}$ proba. invariante.

Alors : pour π-presque tout x, on a : $\forall$

$\forall f$ tq : $\pi(|f|) < \infty$, $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi(f)$, $\mathbb{P}_x$-p.s.

Preuve. Posons $A = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f) \right\}$.

Par Corollaire 1, $\mathbb{P}_\pi(A) = \underline{1} = \int \pi(dx) \underbrace{\mathbb{P}_x(A)}_{\in [0,1]}$.

$\Rightarrow \mathbb{P}_x(A) = 1$ pour π-presque tout x.

ie : $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \to \pi(f)$, $\mathbb{P}_x$-p.s pour

(π presque tout x.

ie : pour $x \in \mathbb{X}_0$ où $\pi(\mathbb{X}_0) = 1$)

Preuve du Thm $*$

Soit P noyau de Markov avec une proba. invariante unique π ;

. Mq : $(X^{\mathbb{N}}, \mathcal{X}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}_\pi, S)$ est ergodique

ie : si A vérifie : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ S$, mq : $\mathbb{P}_\pi(A) = 0$ ou 1.

• $\mathbb{P}_\pi(A) = \int \pi(dx) \underbrace{\mathbb{P}_x(A)}_{h_A(x)}$.

Si $\mathbb{P}_\pi(A) \neq 0$ mq : $\boxed{\mathbb{P}_\pi(A) = 1.}$

$\boxed{\text{Lemme : on a : } h_A(X_0) = h_A(X_1) = \mathbb{1}_A \text{ , } \mathbb{P}_\pi\text{-p.s.}}$

Supposons le lemme vrai.

Posons $\pi_A(f) = \dfrac{\int \pi(dx) [h_A(x) f(x)]}{\underbrace{\mathbb{P}_\pi(A)}_{\text{cste}} \neq 0} =$

$\pi_A(Pf) \overset{?}{=} \pi_A(f)$.

$$\int \pi(dx) [h_A(x) Pf(x)] = \mathbb{E}_\pi[h_A(X_0) \cdot Pf(X_0)].$$

$$= \mathbb{E}_\pi[\underbrace{h_A(X_0)}_{h_A(X_1)} f(X_1)] \quad \mathbb{P}_\pi\text{-p.s.}$$

$$= \mathbb{E}_\pi[h_A(X_1) f(X_1)]$$

$$= \mathbb{E}_\pi[h_A(X_0) f(X_0)].$$

$\Rightarrow$ $\pi_A(Pf) = \pi_A(f)$.

$\Rightarrow$ $\pi_A(f) = \pi(f)$ car π est l'unique proba invariante.

or : $\underbrace{\dfrac{\pi[h_A \times f]}{\mathbb{P}_\pi(A)}}_{\pi_A(f)} = \pi(f)$.

$$\mathbb{P}_\pi(A) = \int \pi(dx)\, h_A(x) = \frac{\mathbb{E}_\pi[\overbrace{h_A(X_0) h_A(X_0)}^{\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A}]}{\mathbb{P}_\pi(A)}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_\pi(\mathbb{1}_A)}{\mathbb{P}_\pi(A)} = 1.$$

Preuve du lemme : mq : $h_A(X_0) = h_A(X_1) = \mathbb{1}_A$.

où A tq : $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A \circ S$. et $h_A(x) = \mathbb{P}_x(A)$.

$$Ph_A(x) = \mathbb{E}_x[h_A(X_1)].$$