Ex2 : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \left(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right)_{1 \le i, j \le 3}$

1) $\mathrm{Var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = B = ?$

$$B = \mathrm{Var}(X_3) + \alpha_1^2 \mathrm{Var}(X_1) + \alpha_2^2 \mathrm{Var}(X_2) - 2\alpha_1 \mathrm{Cov}(X_3, X_1) - 2\alpha_2 \mathrm{Cov}(X_3, X_2) + 2\alpha_1\alpha_2 \mathrm{Cov}(X_1, X_2).$$

$$= 9 + 2\alpha_1^2 + 5\alpha_2^2 - 6\alpha_1 - 12\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_2 = f(\alpha_1, \alpha_2).$$

2) $f(1,1) = 9 + 2 + 5 - 6 - 12 + 2 = 0.$

Donc $\mathrm{Var}(\underbrace{\overbrace{X_3 - X_1 - X_2}^{Z}}_{(u^T X)}) = 0$ donc : $\exists c$ constante, $X_3 - X_1 - X_2 = c$, p.s.

(en effet : $\mathrm{Var}(Z) = 0 = \mathbb{E}((Z - \mathbb{E}(Z))^2)$. donc : $Z = \mathbb{E}(Z)$, p.s.

$u^T A u = 0 \Rightarrow A u = 0.$

3)(a) $u^T \underbrace{\Sigma}_{\shortparallel} u = \mathrm{Var}(u^T Y).$
matrice de Var-cov de Y.

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}\left((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T\right) = \mathbb{E}(YY^T) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Y)^T = \left[\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)\right]_{1 \le i, j \le n}.$$

= matrice de variance covariance de Y.

$$\mathrm{Var}(CY) = \mathbb{E}\left[[CY - \overbrace{\mathbb{E}(CY)}^{C\mathbb{E}(Y)}][CY - \mathbb{E}(CY)]^T\right].$$

$$= \mathbb{E}\left[C(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T C^T\right].$$

$$= C \underbrace{\mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))^T\right]}_{\mathrm{Var}(Y).} C^T$$

$\mathrm{Var}(u^T Y) = u^T \mathrm{Var}(Y) u = u^T \Sigma u \ge 0.$

(b) Σ non inversible $\Leftrightarrow \exists u \ne 0, u \in \mathbb{R}^n, \Sigma u = 0.$

$\Leftrightarrow \exists u \ne 0, u \in \mathbb{R}^n, \underbrace{u^T \Sigma u}_{\mathrm{Var}(u^T Y)} = 0.$ ($\Leftarrow$ vrai car Σ sym. réelle $\oplus$.

$\Leftrightarrow \exists u \ne 0, u \in \mathbb{R}^n / \exists c$ cst. $u^T Y = c$ p.s. ; $\sum_{i=1}^n u_i Y_i = c$ p.s.

$\Sigma = U^T D U \quad D = (\mathrm{diag}(\lambda_i))$, $\lambda_i \ge 0$.

$u^T \Sigma u = (Uu)^T D Uu = \sum_1^n \lambda_i \alpha_i^2 = 0$, $Uu = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \exists i / \lambda_i = 0$

$\Leftrightarrow \exists u \ne 0, u \in \mathbb{R}^n, \exists c$ cst. $\exists u_{i_0} \ne 0$, $\boxed{Y_{i_0} = -\sum_{i \ne i_0} \frac{u_i Y_i}{u_{i_0}} + \frac{c}{u_{i_0}}}$.

3) si Y est tq : $\Sigma = Var(Y)$ est non inversible alors : $\exists u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$: $u^T(Y - \mathbb{E}(Y)) = 0$ ps

ie : $Y - \mathbb{E}(Y) \in H = u^{\perp}$ ps.

ie : $\mathbb{P}(Y - \mathbb{E}(Y) \in H) = 1$.

Donc : Y ne peut pas avoir une densité % λ_n (mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$).

en effet pour tout hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_n(H) = 0$.

Mq : $\lambda_n(\underbrace{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}}_{H}) = 0$.

$\lambda_n(]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$

$\lambda_n(]a_1, b_1[\times \dots \times]a_{n-1}, b_{n-1}[\times \{0\}) = 0$. (en faisant $\begin{cases} a_n = -\varepsilon \\ b_n = \varepsilon \end{cases}$ et $\varepsilon \to 0$)

$\lambda_n(]-m, m[^{n-1} \times \{0\}) = 0 \quad \forall m$.

$\Rightarrow \lambda_n(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}) = 0$ en faisant $m \to +\infty$ (convergence monotone).

$\bigcup_m [(]-m, m[)^{n-1} \times \{0\}]$.

Ex6 :

1) $N = \inf\{i / X_i \geq s\}$.

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(X_1 < s, X_2 < s, \dots, X_{n-1} < s, X_n \geq s) \overset{(X_i)\text{ iid}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 < s)^{n-1}}_{(1-p)^{n-1}} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \geq s)}_{p}.$$

donc : $N \sim geom(p)$ où $p = \mathbb{P}(X_1 \geq s)$.

2). Ainsi : $\{N < \infty\}$ p.s (ie : $\mathbb{P}(N < \infty) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$).

$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X_N \in A, N = n) = \mathbb{P}(X_n \in A, N = n) = \mathbb{P}(X_n \in A, X_n \geq s, X_{n-1} < s, \dots, X_1 < s).$$

$$= \underbrace{\frac{\mathbb{P}(X_1 \in A, X_1 \geq s)}{\mathbb{P}(X_1 \geq s)}} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 < s)^{n-1}}_{(1-p)^{n-1}} \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \geq s)}_{p}.$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \in A / X_1 > s)}_{\mathbb{P}(X_N \in A).} \underbrace{(1-p)^{n-1} p}_{\mathbb{P}(N=n).} = \mathbb{P}(X_N \in A, N=n).$$

car $\{N<\infty\}$ p.s

$$\mathbb{P}(X_N \in A) = \mathbb{P}(X_N \in A, N \in \mathbb{N}_*) = \sum_{n \in \mathbb{N}_*} \mathbb{P}(X_N \in A, N=n) = \mathbb{P}(X_1 \in A / X_1 > s) \underbrace{\sum_{n \geq 1} (1-p)^{n-1} p}_{=1}.$$

Donc X_N suit la loi $A \mapsto \mathbb{P}(X_1 \in A / X_1 > s)$.

. et $N \sim \text{Geom}(p)$ et $X_N \perp\!\!\!\perp N$ car $(\mathbb{P}(X_N \in A, N=n) = \mathbb{P}(X_N \in A)\, \mathbb{P}(N=n)$.

Si on veut tirer suivant $A \longmapsto \mathbb{P}(X \in A / \underline{X \in D})$ on tire X_i iid jusqu'à ce que $X_N \in D$

Alors : $Z = X_N$. suit la loi :

$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A / X \in D)$.

Question : supposons qu'on a une pièce biaisée de paramètre p inconnue.

. $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$: $X \sim Be(p)$. $Y \sim Be(p)$ $X \perp\!\!\!\perp Y$. Comment faire pour tirer une Bernoulli de param $1/2$.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \cdot \Big/ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = D.$$

$$\mathbb{P}((X,Y) = (1,0) / (X,Y) \in D) = \frac{\mathbb{P}((X,Y) = (1,0),\ (X,Y) \in D)}{\mathbb{P}((X,Y) \in D)}.$$

$$= \frac{\mathbb{P}((X,Y) = (1,0))}{\mathbb{P}((X,Y) = (1,0)) + \mathbb{P}((X,Y) = (0,1))} = \frac{p(1-p)}{p(1-p) + (1-p)p} = \frac{1}{2}.$$

Donc : on tire $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$ iid (où $X_i \perp\!\!\!\perp Y_i$, $X_i \sim Be(p)$, $Y_i \sim Be(p)$) et on note $N = \inf\{n / \underbrace{X_n \neq Y_n}\}$.

Alors : Z_N suit la loi de $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \Big/ X \neq Y$. donc : $\mathbb{P}(Z_N = (1,0))$
$= \mathbb{P}((X,Y) = (1,0) / X \neq Y)$
$= 1/2$.

Implément :

But : simuler suivant f densité.

Soient 2 densités, f, g tq: $f \leq Mg$. où M est une constante.

RAPPEL SUR LE REJET.

Hypothèse: On sait $\left\{\begin{array}{l}\text{simuler suivant } g. \\ \text{la valeur de } \dfrac{f(x)}{Mg(x)}\end{array}\right.$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors l'algo de rejet s'écrit: (1) Tirer $X \sim g$, $U \sim \mathrm{Unif}[0,1]$ et $X \perp\!\!\!\perp U$.

(2) While $U > \dfrac{f(X)}{Mg(X)}$ do: tirer indép. (X, U) avec $\left|\begin{array}{l}X \sim g. \\ U \sim \mathrm{Unif}[0,1].\end{array}\right.$

(3) Poser $Z = X$.

Ex de l'exercice 6

$$f(x) = \frac{g(x)\mathbb{1}_D(x)}{\int g(y)\mathbb{1}_D(y)\,dy}. \Rightarrow f(x) \leq M\, g(x). \text{ où } M = \frac{1}{\int_D g(y)\,dy}.$$

Critère d'arrêt: $U \leq \dfrac{f(X)}{Mg(X)} = \dfrac{\dfrac{g(x)\mathbb{1}_D(x)}{\int_D g(y)\,dy}}{\dfrac{1}{\int_D g(y)\,dy}\, g(x)} = \mathbb{1}_D(x)$.

Tirer $\begin{pmatrix}X_i \\ U_i\end{pmatrix}$ iid tq: $(X_i, U_i) \sim \left((x,u) \mapsto g(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(u)\right)$

$$N := \inf\left\{ i \,/\, U_i \leq \frac{f(X_i)}{Mg(X_i)} \right\}.$$

On pose $Z = \begin{cases} X_N & \text{si } N < \infty \\ \infty & \text{si } N = \infty. \end{cases}$

Mq: $\boxed{Z \sim f,\ N \sim \mathrm{geom}\left(\frac{1}{M}\right),\ Z \perp\!\!\!\perp N.}$

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{P}(Z \in A, N = n). = \mathbb{P}\left(X_n \in A,\ U_n \leq \frac{f(X_n)}{Mg(X_n)},\ U_{n-1} > \frac{f(X_{n-1})}{Mg(X_{n-1})}, \dots, U_1 > \frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right).$$

$$\overset{\begin{pmatrix}X_i \\ U_i\end{pmatrix} \text{iid}}{=} \underbrace{\frac{\mathbb{P}\left(X_1 \in A, U_1 \leq \frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right)}{\mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right)}} \quad \underbrace{\mathbb{P}\left(U_1 > \frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right)}_{(1-p)}^{n-1}. \quad \underbrace{\mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right)}_{p}.$$

$$\mathbb{P}\left(X_1\in A,\ U_1<\frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right) = \iint \mathbb{1}_A(x)\,\mathbb{1}\Big(u<\underbrace{\frac{f(x)}{Mg(x)}}_{\le 1}\Big)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(u)\, g(x)\,du\,dx.$$

$$= \int \mathbb{1}_A(x)\,\frac{f(x)}{M\cancel{g(x)}}\times \cancel{g(x)}\,dx = \frac{\int \mathbb{1}_A(x)\,f(x)\,dx}{M}$$

et $\mathbb{P}\left(U_1<\frac{f(X_1)}{Mg(X_1)}\right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)\,dx}{M} = \frac{1}{M} = p$. (c'est la formule pour $A=\mathbb{R}$).

Donc : $$\boxed{P(Z\in A, N=n) = \underbrace{\int \mathbb{1}_A(x)\,f(x)\,dx}\ \times\ \underbrace{\left(1-\frac{1}{M}\right)^{n-1}\frac{1}{M}}}$$ Ce qui achève la preuve

Rq : $\underline{A=\mathbb{R}}$: $P(N=n) = \left(1-\frac{1}{M}\right)^{n-1}\frac{1}{M} \Rightarrow N\sim \text{geom}(1/M)$.

donc : $\mathbb{P}(N<\infty) = 1$. donc : $\underline{\mathbb{P}(Z\in A)} = \mathbb{P}(Z\in A, N<\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z\in A, N=n)$.

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_A f(z)\,dz\right)(1-p)^{n-1}p = \underline{\int_A f(z)\,dz}.$$

<u>Suite à l'exo sur les pièces biaisées</u>

Comment à partir d'une pièce équilibrée (ie $X\sim Be(1/2)$) simuler $Y\sim Be(q)$, où $q\in]0,1[$.

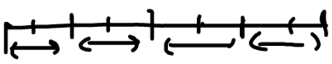
· $q = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{2^{-k}}_{\substack{2^{-(k-1)}\times\frac{1}{2} \\ (1-p)^{k-1}\,p}} a_k = \mathbb{E}(a_N)$ où $N\sim \text{geom}(1/2)$.

$p = 1/2$.

$N\sim\text{geom}(1/2)$, prenons : $Z = a_N$. alors : $Z\in\{0,1\}$.

$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}[a_N] = q$.

donc : $Z\sim Be(q)$.



On pourrait à partir d'une pièce équilibrée simuler n'importe quelle variable discrète prenant un nb fini de valeurs.