$\mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. RAPPEL du cours sur les mesures (suite à des questions).

$\mu : \overset{\text{ensemble}}{A} \longmapsto \mu(A)$

$\mu : f, f^n \longmapsto \mu(f)$. $\qquad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\mu(\mathbb{1}_A) = \int \mathbb{1}_A(x)\, \mu(dx) \overset{\Delta}{=} \mu(A).$$

$$\Big[\ \underbrace{\mu\Big(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}\Big)}_{f\ :\ \sum \alpha'_k \mathbb{1}_{A'_k}} \overset{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, \mu(\mathbb{1}_{A_k}).$$

f : mesurable $\Omega \to \mathbb{R}^+$.

$\mu(f) = \sup\{\mu(g)\,;\ g \le f \text{ et } g = CL(\mathbb{1}_A)\}$

$\to \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

$$\mu(dx) = f(x)\, \underbrace{\lambda(dx)}_{d\lambda(x)}.$$

$\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$ où $\mu(|f|) < \infty$

$(\mu(f^+) < \infty,\ \mu(f^-) < \infty)$

$$\mu(f) = \int f(x)\, \mu(dx).$$

$$\int_a^b dx = b - a = \int_a^b \lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\, \lambda(dx) = \lambda(\mathbb{1}_{[a,b]}) = \underbrace{\lambda([a,b])}_{= b-a}.$$

$$\mu(A) = \int \mathbb{1}_A(x)\, f(x)\, \lambda(dx).$$

$\boxed{\text{Ex 4 :}}$ Soit f C^0 bornée. On pose : $Y = \frac{1}{X}$ où X est de densité : $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ % λ (mes. de Leb.)

$$\mathbb{E}[f(Y)] \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, h(y)\, dy$$

$$= \mathbb{E}\Big(f\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\Big(\frac{1}{x}\Big) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \int_{-\infty}^{0} f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{y}\Big) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx + \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{1}{x}\Big) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

$$= \int_0^{-\infty} f(y) \frac{1}{\pi(1+y^{-2})} \Big(-\frac{1}{y^2}\Big) dy + \int_{+\infty}^{0} f(y) \frac{1}{\pi(1+y^{-2})} \Big(-\frac{1}{y^2}\Big) dy.$$

(par changement de variable : $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}^*_- \to \mathbb{R}^*_-$.
$y = \frac{1}{x} \Rightarrow \big(dx = -\frac{1}{y^2}\, dy\big)$)

$$= \int_{-\infty}^{0} f(y) \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy + \int_0^{+\infty} f(y) \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy.$$

Donc $\boxed{Y = \frac{1}{X} \text{ a pour densité : } y \mapsto \frac{1}{\pi(1+y^2)}.}$ % à λ (mesure de Lebesgue)

$\boxed{\text{Ex 6}}$ $\mathbb{E}(X)=0$, $a>0$.

1) Mq : $a \leq \mathbb{E}\left((a-X)\mathbb{1}(X<a)\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X<a)}\,.\sqrt{\mathrm{Var}(X)+a^2}$.

Dém : $a = (a-X)\mathbb{1}(X<a) + (a-X)\mathbb{1}(X\geq a) + X$.

Donc : $a = \mathbb{E}\left[(a-X)\mathbb{1}(X<a)\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[(a-X)\mathbb{1}(X\geq a)\right]}_{\leq 0} + \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{0}$

≤ 0 (en effet : $(a-X(\omega))(\mathbb{1}(X(\omega)\geq a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega)<a \\ a-X(\omega)\leq 0 & (\text{si } X(\omega)\geq a) \end{cases}$ ≤ 0 (dans les 2 cas)

donc : $a \leq \mathbb{E}\left((a-X)\mathbb{1}(X<a)\right) \leq \sqrt{\underbrace{\mathbb{E}\left((a-X)^2\right)}_{(\mathrm{Var}(a-X)+\mathbb{E}(a-X)^2)}.\underbrace{\mathbb{E}\left(\mathbb{1}(X<a)^2\right)}_{\mathbb{E}(\mathbb{1}(X<a)) = \mathbb{P}(X<a)}}$ (par CS).

$\mathrm{Var}(a-X) + \mathbb{E}(a-X)^2 = \mathrm{Var}(X) + a^2$

$a \leq \mathbb{E}\left((a-X)\mathbb{1}(X<a)\right) \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)+a^2}\,\sqrt{\mathbb{P}(X<a)}$.

2). On en tire : $\underbrace{\mathbb{P}(X<a)}_{1-\mathbb{P}(X\geq a)} \geq \dfrac{a^2}{\mathrm{Var}(X)+a^2}$ d'où : $\mathbb{P}(X\geq a) \leq 1 - \dfrac{a^2}{\mathrm{Var}(X)+a^2} = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\underbrace{\mathrm{Var}(X)+a^2}}$.

$\leq \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$.

$a>0$..

$\mathbb{P}(X\geq a) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}(X\geq a)\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2} = \dfrac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$. (borne de chebychev)

$\mathbb{1}(X\geq a) \leq \mathbb{1}(X^2\geq a^2)$

$\mathbb{1}\left(\frac{X^2}{a^2}\geq 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{X^2}{a^2}<1. \\ 1 & \text{si } 1\leq \frac{X^2}{a^2}, \end{cases} \leq \dfrac{X^2}{a^2}$

$\boxed{\text{Ex 7}}$: $\mathbb{E}(X)\geq 0$. 1) Mq : $\forall \lambda>0$, $X \leq \lambda\mathbb{E}(X) + X\,\mathbb{1}(X>\lambda\mathbb{E}(X))$. $(*)$.

. Cas 1 : $X \leq \lambda\mathbb{E}(X)$. alors : $X \leq \lambda\mathbb{E}(X) + \underbrace{0}_{= X\mathbb{1}(X>\lambda\mathbb{E}(X))}$.

donc $(*)$ vérifiée ici

Cas 2 : $X > \lambda\mathbb{E}(X)$.

Alors : $0 \leq \lambda\mathbb{E}(X)$. (car $\lambda>0$, et $\mathbb{E}(X)\geq 0$).

donc : $X \leq \lambda\mathbb{E}(X) + X \times \underbrace{1}_{\mathbb{1}(X>\lambda\mathbb{E}(X))}$ donc $(*)$ vérifié.

· Finalement (*) vrai dans tous les cas.

2) En prenant l'espérance dans (1) :

$$\mathbb{E}(X) \leq \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X \mathbb{1}(X > \lambda \mathbb{E}(X)))$$

donc : $(1-\lambda)\, \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(X \mathbb{1}(X > \lambda \mathbb{E}(X))) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\, \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{1}^2(X > \lambda \mathbb{E}(X))}_{\mathbb{1}(X > \lambda \mathbb{E}(X))})}$.

$$\leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\, \mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}(X))}$$

donc : $\boxed{\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}(X)) \geq \dfrac{(1-\lambda)^2\, \mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}}$

Ex 9 : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q > 0$.

1) $u, v \geq 0$. mq : $uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$.

. On peut toujours supposer $u, v > 0$.

$$uv = e^{\frac{1}{p}(p \ln(u)) + \frac{1}{q}(q \ln v)} \overset{\text{par convexité de l'exp.}}{\leq} \frac{1}{p} e^{p \ln u} + \frac{1}{q} e^{q \ln v} = \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q.$$

ou $\left(\ln(uv) = \frac{1}{p} \ln(u^p) + \frac{1}{q} \ln(v^q) \leq \ln\left(\frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q\right)\right)$ (concavité du ln).

2). Si $\mathbb{E}(|X|^p) = \infty$ ou $\mathbb{E}(|Y|^q) = \infty$ alors Hölder est trivial.

$$\mathbb{E}\left(\underbrace{\frac{|X|}{\mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}}}_{u}\ \underbrace{\frac{|Y|}{\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}}}_{v}\right).$$

$$\leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{|X|}{\mathbb{E}(|X|^p)^{1/p}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|Y|}{\mathbb{E}(|Y|^q)^{1/q}}\right)^q\right].$$

$$= \frac{1}{p}\, \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\mathbb{E}(|X|^p)} + \frac{1}{q}\, \frac{\mathbb{E}(|Y|^q)}{\mathbb{E}(|Y|^q)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(si $p = q = 2$ $\longrightarrow$ Cauchy Schwarz).

$\underline{|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|}$ (car : $\|u + \lambda v\|^2 = \overbrace{\lambda^2 \|v\|^2 + \|u\|^2 + 2\lambda \langle u, v\rangle}^{\geq 0\ \forall \lambda}$)

donc : $\Delta \leq 0$.

$$\mathbb{E}((X + \lambda Y)^2) \geq 0 \quad \forall \lambda.$$

Ex 11.

1) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y$.

De +, $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbb{1}_{x,y\geq 0}\,dx\,dy$.

$$= \int_0^{\infty} \Big(\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)}\,dx}_{\underbrace{\left[\frac{2}{\pi}\frac{e^{-x(1+y^2)}}{-(1+y^2)}\right]_{x=0}^{x\to+\infty}}_{\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}}} \Big)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}(y)\right]_0^{+\infty} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

($Z \sim$ Cauchy alors : $|Z|$ a pour densité : $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$ % λ.)

2) Loi de X ? Loi de Y ?

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy$.

$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx$.